Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur k et soit R son algèbre affine. Appelons <u>relèvement lisse de</u> R la donnée d'un A-anneau spécial $\mathfrak{R}$ (au sens du n° II.5.4) et d'un isomorphisme de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{R}\otimes_A k$ sur R. Un tel relèvement existe toujours (si $R = \prod R_i$ est la décomposition de R en produit d'anneaux locaux, alors, pour chaque i, un choix de coordonnées permet d'identifier R_i à l'anneau des séries formelles $k_i[[X_1,X_2,\dots,X_d]]$ à coefficients dans une extension finie k_i de k ; on peut prendre $\mathfrak{R} = \prod \mathfrak{R}_i$, avec $\mathfrak{R}_i = W(k_i)[[X_1,\dots,X_d]]$ et l'isomorphisme évident de $\mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ sur R) ; il est unique à isomorphisme non unique près.

Soit $\Delta : R \to R\hat{\otimes}_k R$ le coproduit et soit $\hat{\Delta} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}\hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ un homomorphisme continu de A-anneaux qui relève Δ (un tel homomorphisme existe toujours -on ne demande pas qu'il munisse $\mathfrak{R}$ d'une structure de bigèbre formelle). Il est clair que $\hat{\Delta}$ se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme continu de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ dans $(\widehat{\mathfrak{R}\hat{\otimes}_A \mathfrak{R}})_K^{an}$ que nous notons encore $\hat{\Delta}$.

Pour tout $\alpha \in \hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$, posons $\hat{\partial}\alpha = \alpha\hat{\otimes}1 - \hat{\Delta}\alpha + 1\hat{\otimes}\alpha$ et

$$\mathcal{M}\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}(G) = \{\alpha \in P(\mathfrak{R}) \mid \hat{\partial}\alpha \in p\mathfrak{R}\hat{\otimes}_A \mathfrak{R}\} ;$$

c'est un sous-A-module de $P(\mathfrak{R})$ contenant $p\mathfrak{R}$; on voit que $\mathcal{M}\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}(G)$ ne dépend pas du choix du relèvement $\hat{\Delta}$ de Δ (si $\hat{\Delta}_1$ est un autre relèvement de Δ, on a $\hat{\Delta}_1\beta \equiv \hat{\Delta}\beta \pmod{p\mathfrak{R}}$, pour tout $\beta \in \mathfrak{R}$; tout élément de $P(\mathfrak{R})$ s'écrit comme une somme infinie d'éléments de la forme $p^{-n}\beta^{p^n}$, avec $\beta \in \mathfrak{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, et l'on a $\hat{\Delta}_1\beta^{p^n} \equiv \hat{\Delta}\beta^{p^n} \pmod{p^{n+1}\mathfrak{R}}$ donc $\hat{\Delta}_1(p^{-n}\beta^{p^n}) \equiv \hat{\Delta}(p^{-n}\beta^{p^n})$ (mod $p\mathfrak{R}$)).

Posons $MH_{\mathfrak{R}}(G) = \mathcal{M}\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}(G)/p\mathfrak{R}$. On peut considérer $MH_{\mathfrak{R}}(G)$ comme un sous-A-module de $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$. D'après la proposition 5.5 du chapitre II, l'application $w_{\mathfrak{R}}$ définit un isomorphisme de $CW_k(R)$ sur $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$; en particulier, $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$ devient, par transport de structure, un D_k-module. On sait que $\underline{M}(G)$ est le sous-D_k-module de $CW_k(R)$ formé des covecteurs $\underline{a}$ tels que $\underline{a}\hat{\otimes}1 - \Delta\underline{a} + 1\hat{\otimes}\underline{a} = 0$; on en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 6.5.- <u>Soit</u> G <u>un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur</u> k <u>et soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>un relèvement lisse de l'algèbre affine de</u> G. <u>Le module</u> $MH_{\mathfrak{R}}(G)$ <u>est un sous-</u>D_k<u>-module de</u> $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$ <u>et l'application</u> $w_{\mathfrak{R}}$ <u>induit un isomorphisme de</u> $\underline{M}(G)$ <u>sur</u> $MH_{\mathfrak{R}}(G)$.

CHAPITRE IV

GROUPES FORMELS LISSES SUR UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE

§ 1.- <u>Le cas</u> $e = 1$.

1.1. Soit G un p-groupe formel lisse de dimension finie sur $A = W(k)$ et soit $\mathfrak{R}$ son algèbre affine. Soit $G_k = G\otimes_A k$ la réduction de G modulo p ; c'est un groupe formel lisse de dimension finie sur k dont l'algèbre affine s'identifie à $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}\otimes_A k = \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$. On voit, avec les conventions de II.5.4 et III.6.4, que $\mathfrak{R}$ est un A-anneau spécial qui est un relèvement lisse de $\mathfrak{R}_k$. Notons $\Delta : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}\hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ (resp. $\Delta_k : \mathfrak{R}_k \to \mathfrak{R}_k\hat{\otimes}_k \mathfrak{R}_k$) le coproduit relatif à G (resp. à G_k) ; il est clair que Δ relève Δ_k. Notons encore Δ le prolongement de Δ à $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ et, pour tout $\alpha \in \hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$, posons $\partial\alpha = \alpha\hat{\otimes}1 - \Delta\alpha + 1\hat{\otimes}\alpha$. Notons $\mathcal{M}\mathcal{H}(G)$ le sous-A-module de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ formé des $\alpha \in P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha \in p\mathfrak{R}\hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ et $MH(G)$ le quotient de $\mathcal{M}\mathcal{H}(G)$ par $p\mathfrak{R}$. Avec les notations du n° III.6.4, on a $\mathcal{M}\mathcal{H}(G) = \mathcal{M}\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}(G_k)$ et $MH(G) = MH_{\mathfrak{R}}(G_k)$. Il résulte donc de la proposition 6.5 du chapitre III que $MH(G)$ s'identifie canoniquement au module de Dieudonné $\underline{M}(G_k)$ de G_k.

Notons $\mathfrak{L}(G)$ l'ensemble des éléments α de $P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha = 0$. Il est clair que $\mathfrak{L}(G)$ est un sous-A-module de $\mathcal{M}\mathcal{H}(G)$. Nous notons $\rho(G)$ l'application A-linéaire

$$\mathfrak{L}(G) \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathcal{M}\mathcal{H}(G) \xrightarrow{\text{proj. can.}} MH(G) \xrightarrow{\text{iso. can.}} \underline{M}(G_k) .$$

L'image par $\rho(G)$ de $p\mathfrak{L}(G)$ est contenue dans $p\underline{M}(G_k) \subset \underline{FM}(G_k)$; on en déduit, par passage aux quotients, une application k-linéaire $\tilde{\rho}(G)$ de $\mathfrak{L}(G)/p\mathfrak{L}(G)$ dans $\underline{M}(G_k)/\underline{FM}(G_k)$.

PROPOSITION 1.1.- <u>Soit</u> G <u>un p-groupe formel lisse de dimension finie sur</u> A. <u>Posons</u> $M = \underline{M}(G_k)$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(G)$ <u>et</u> $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(G)$. <u>Alors</u>

i) <u>l'application</u> $\tilde{\rho} : \mathfrak{L}/p\mathfrak{L} \to M/\underline{F}M$ <u>est un isomorphisme de k-espaces vectoriels</u> ;

ii) <u>le A-module</u> $\mathfrak{L}$ <u>est libre de rang fini</u>.

Démonstration :

i) posons $\rho = \rho(G)$. Soit $\alpha \in \mathcal{L}$; si $\rho(\alpha) = \underline{a}$, $\underline{a}$ s'écrit comme un covecteur $(\dots, a_{-n}, \dots, a_0)$ à coefficients dans $\mathfrak{R}_k$ et, quel que soit le choix des relèvements $\hat{a}_{-n}$ des a_{-n} dans $\mathfrak{R}$, $\alpha - \sum p^{-n} \hat{a}^{p^n}_{-n} \in p\mathfrak{R}$.

Si $\alpha \in \mathcal{L}$ est tel que $\rho(\alpha) = \underline{a} \in \underline{F}M$, il existe $\underline{b} = (\dots, b_{-n}, \dots, b_0) \in M$ tel que $\underline{a} = \underline{F}\,\underline{b} = (\dots, b^p_{-n}, \dots, b^p_0)$. Si, pour tout n , $\hat{b}_{-n}$ est un relèvement de b_{-n} dans $\mathfrak{R}$, on a donc $\alpha - \sum p^{-n} (\hat{b}^p_{-n})^{p^n} = \alpha - \sum p^{-n} \hat{b}^{p^{n+1}}_{-n} \in p\mathfrak{R}$. Il existe donc un élément $\hat{b}_1 \in \mathfrak{R}$ tel que $\alpha = \sum\limits_{n=-1}^{\infty} p^{-n} \hat{b}^{p^{n+1}}_{-n} = p\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^{-n} \hat{b}^{p^n}_{-n+1}\right)$; on voit donc que $\beta = p^{-1}\alpha$ vérifie $\partial\beta = 0$ et $\beta \in P(\mathfrak{R})$. Donc $\alpha \in p\mathcal{L}$, ce qui montre que l'application $\tilde{\rho}$ est injective.

Pour montrer que $\tilde{\rho}$ est surjective, commençons par établir un lemme :

LEMME 1.2.- Soit r un entier ≥ 1 et soit $\alpha \in P(\mathfrak{R})$ tel que $\partial\alpha \in p^r \mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$. Il existe un élément $\gamma \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$ tel que $\rho(\gamma) \in \underline{F}M$ et $\partial(\alpha - p^{r-1}\gamma) \in p^{r+1}\mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ (on a encore noté ρ la projection canonique de $\mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$ sur $\underline{M}(G_k) = M$).

Démonstration du lemme : si $\hat{G}_{aA}$ est le complété formel du groupe additif sur A , $\mathfrak{R}^{\hat{\otimes} n}$ s'identifie au groupe des n-cochaînes de G à valeurs dans $\hat{G}_{aA}$ et l'opérateur bord coïncide, en dimension 1 , avec ∂ .

Si l'on pose $\partial\alpha = p^r\beta$, alors $\beta \in \mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ et vérifie $\partial\beta = 0$ car $p^r \partial\beta = \partial(p^r\beta) = \partial(\partial\alpha) = 0$. Si b_0 désigne l'image de β dans $\mathfrak{R}_k \hat{\otimes}_k \mathfrak{R}_k$, on a donc $\partial b_0 = 0$ (où ∂ désigne maintenant l'opérateur bord pour la cohomologie de G_k à valeurs dans $\hat{G}_{ak}$). Si l'on pose

$$\underline{b} = (\dots, 0, \dots, 0, b_0) \in \widehat{CW}_k(\mathfrak{R}_k \hat{\otimes}_k \mathfrak{R}_k) = C^1(G_k, \widehat{CW}_k) ,$$

on voit que $\partial\underline{b} = 0$ (où, cette fois-ci, ∂ est l'opérateur bord pour la cohomologie de G_k à valeurs dans $\widehat{CW}_k$). Comme b_0 est un tenseur symétrique, $\underline{b}$ est un 2-cocycle symétrique. Comme $\widehat{CW}_k$ est un objet injectif de la catégorie des groupes formels sur k (théorème 2 du chapitre III), on a

$$H^2_s(G_k, \widehat{CW}_k) = \mathrm{Ext}^1_{ab}(G_k, \widehat{CW}_k) = 0 \ ;$$

on en déduit l'existence d'un élément $\underline{c} = (\dots, c_{-n}, \dots, c_0) \in \widehat{CW}_k(\mathfrak{R}_k)$ tel que $\partial\underline{c} = \underline{b}$. Si l'on désigne par $\hat{c}_{-n}$ un relèvement de c_{-n} dans $\mathfrak{R}$, on voit donc que $\partial\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} p^{-n} \hat{c}^{p^n}_{-n}\right) \equiv \beta \pmod{p\mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}}$. Posons $\gamma = p \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^{-n} \hat{c}^{p^n}_{-n}$; on a

$\partial(p^{r-1}\gamma) \equiv p^r\beta \pmod{p^{r+1}\mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}}$ donc $\partial(\alpha - p^{r-1}\gamma) \in p^{r+1}\mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$.

On voit d'autre part que γ est un relèvement dans $P(\mathfrak{R})$ de $p\underline{c} = \underline{F}\,\underline{V}\,\underline{c} = \underline{F}(\dots, c_{-n+1}, \dots, c_{-1})$; mais l'égalité $\partial\underline{c} = \underline{b}$ montre que $\partial(\underline{V}\,\underline{c}) = \underline{V}\,\underline{b} = 0$, donc que $\underline{V}\,\underline{c} \in M$. On voit donc que $\gamma \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$ et que $\rho(\gamma) = p\underline{c} \in \underline{F}M$, d'où le lemme.

Pour montrer que $\tilde{\rho}$ est surjective, on voit qu'il suffit de vérifier que pour tout $\underline{a} \in M$, il existe $\alpha \in \mathcal{L}$ tel que $\rho(\alpha) \equiv \underline{a} \pmod{\underline{F}M}$.

Si $\underline{a} \in M$ et si α_1 est un élément de $P(\mathfrak{R})$ tel que $\rho(\alpha_1) = \underline{a}$, on sait que $\alpha_1 \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$, donc que $\partial\alpha_1 \in p\mathfrak{R}$.

Le lemme permet donc de construire par récurrence une suite $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r, \dots$ d'éléments de $\mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$ tels que $\rho(\gamma_r) \in \underline{F}M$ et $(\alpha_1 - \gamma_1 - \dots - p^{r-1}\gamma_r) \in p^{r+1}\mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$, pour tout r .

Mais $\mathfrak{M}\mathfrak{H}(G)$, extension du A-module profini $MH(G)$ $(\simeq M)$ par le A-module $p\mathfrak{R}$ qui est topologiquement libre donc profini, est un A-module profini. Il est donc séparé et complet pour la topologie p-adique. En particulier, la série de terme général $p^{r-1}\gamma_r$ converge dans $P(\mathfrak{R})$; si $\alpha = \alpha_1 - \sum\limits_{r=1}^{\infty} p^{r-1}\gamma_r$, on voit que $\partial\alpha = 0$ et que $\rho(\alpha) = \rho(\alpha_1) - \sum\limits_{r=1}^{\infty} p^{r-1}\rho(\gamma_r) \equiv \rho(\alpha_1) \pmod{\underline{F}M}$ et $\tilde{\rho}$ est bien surjective.

L'assertion (ii) est alors évidente : d'après (i), $\mathcal{L}$ est un A-module de type fini ; mais c'est un sous-A-module de $P(\mathfrak{R})$ qui est sans torsion ; il est donc libre de rang fini (on voit que son rang est égal à $\dim_k(M/\underline{F}M)$, donc à la dimension de G).

1.2. Notons Λ^ℓ_A la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathcal{L}, M, \rho)$

- où M est un D_k-module profini sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective, tel que le quotient $M/\underline{F}M$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k ,
- où $\mathcal{L}$ est un A-module libre de rang fini,
- où ρ est une application A-linéaire de $\mathcal{L}$ dans M telle que l'application $\tilde{\rho} : \mathcal{L}/p\mathcal{L} \to M/\underline{F}M$, induite par passage aux quotients, est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Un morphisme $u : (\mathcal{L}, M, \rho) \to (\mathcal{L}', M', \rho')$ de la catégorie Λ^ℓ_A est un couple $(u_{\mathcal{L}}, u_M)$ formé d'une application A-linéaire $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ et d'une application D_k-linéaire continue $u_M : M \to M'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "u_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{L}' \arrow[d, "\rho'"] \\ M \arrow[r, "u_M"] & M' \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Il est clair que Λ_A^{ℓ} est une catégorie additive.

La proposition 6.1 du chapitre III et la proposition 1.1 montrent que, si G est un p-groupe formel lisse, de dimension finie, sur A, le triplet $\mathcal{L}M_A(G) = (\mathcal{L}(G), \underline{M}(G_k), \rho(G))$ est un objet de Λ_A^{ℓ}.

Soit maintenant $f : G' \to G$ un morphisme de p-groupes formels lisses de dimension finie sur A. Par réduction modulo p, f induit un morphisme $f_k : G'_k \to G_k$ donc une application D_k-linéaire continue $\underline{M}(f_k) : \underline{M}(G_k) \to \underline{M}(G'_k)$. Soit, d'autre part, $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{R}'$) l'algèbre affine de G (resp. G') ; le morphisme f induit un homomorphisme continu $f^* : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ qui se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme continu $f_K^* : \hat{\mathfrak{R}}_K^{an} \to (\hat{\mathfrak{R}}')_K^{an}$. Il est clair que f_K^* envoie $P(\mathfrak{R})$ dans $P(\mathfrak{R}')$ et $\mathcal{L}(G)$ dans $\mathcal{L}(G')$. Si l'on note $\mathcal{L}(f)$ la restriction de f_K^* à $\mathcal{L}(G)$, on vérifie immédiatement que le couple $(\mathcal{L}(f), \underline{M}(f_k))$ est un morphisme de la catégorie Λ_A^{ℓ}, i.e. que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(G) \arrow[r, "\mathcal{L}(f)"] \arrow[d, "\rho(G)"'] & \mathcal{L}(G') \arrow[d, "\rho'(G')"'] \\ \underline{M}(G_k) \arrow[r, "\underline{M}(f_k)"] & M(G'_k) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ceci permet de considérer $\mathcal{L}M_A$ comme un foncteur contravariant de la catégorie des p-groupes formels lisses de dimension finie sur A dans Λ_A^{ℓ}. On voit facilement que ce foncteur est additif.

Rappelons (cf. n° I.7.6) que l'on dit qu'un k-groupe formel H est <u>unipotent</u> si $H = \varinjlim \operatorname{Ker} V_{H^{\sigma^n}}$. Si G est un groupe formel sur A (plus généralement sur A', anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée de K = Frac(A)), nous disons que G est <u>unipotent</u> si G_k l'est.

Notons enfin Λ_A^{c} (resp. Λ_A^{u}) la sous-catégorie pleine de Λ_A^{ℓ} dont les

objets sont les triplets $(\mathcal{L}, M, \rho)$ tels que M est "connexe" (resp. "unipotent") i.e. tels que l'action de $\underline{F}$ (resp. de $\underline{V}$) sur M est topologiquement nilpotente.

Il est clair que, si G est un p-groupe formel lisse de dimension finie sur A qui est connexe, (resp. unipotent), $\mathcal{L}M_A(G)$ est un objet de Λ_A^{c} (resp. Λ_A^{u}).

L'objet essentiel de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.- <u>Si</u> $p \neq 2$, <u>le foncteur</u> $\mathcal{L}M_A$ <u>induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur</u> A <u>et la catégorie</u> Λ_A^{ℓ}.

<u>Pour</u> p <u>quelconque, la restriction de</u> $\mathcal{L}M_A$ <u>aux p-groupes formels lisses et connexes (resp. et unipotents) de dimension finie sur</u> A <u>induit une anti-équivalence entre cette catégorie et</u> Λ_A^{c} <u>(resp.</u> Λ_A^{u}) .

1.3. Soit $(\mathcal{L}, M, \rho)$ un objet de Λ_A^{ℓ}. Nous allons lui associer un foncteur covariant de la catégorie des A-anneaux p-adiques (cf. n° II.5.1) dans celle des groupes abéliens.

Soit $\mathcal{S}$ un A-anneau p-adique :

- nous notons $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ (resp. $N_{\mathcal{L}}^0(\mathcal{S})$) le groupe $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K)$ (resp. $\operatorname{Hom}_A(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K/p\mathcal{S})$ des applications A-linéaires de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}_K = \mathcal{S} \otimes_A K$ (resp. dans $\mathcal{S}_K/p\mathcal{S}$) ;
- nous notons $G_M(\mathcal{S})$ le groupe $\operatorname{Hom}_{D_k}^{cont}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$ des applications D_k-linéaires continues de M dans $CW_k(\mathcal{S}_k)$ (où $\mathcal{S}_k = \mathcal{S} \otimes_A k$) ;
- nous notons φ_ρ l'application de $G_M(\mathcal{S})$ dans $N_{\mathcal{L}}^0(\mathcal{S})$ qui à $u \in G_M(\mathcal{S})$ associe $w_{\mathcal{S}} \circ u \circ \rho$ (où $w_{\mathcal{S}} : CW_k(\mathcal{S}_k) \to \mathcal{S}_K/p\mathcal{S}$ est l'application qui a été définie au n° II.5.2) ; il est clair que φ_ρ est un homomorphisme de groupes ;
- enfin, nous notons $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ le produit fibré $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \times_{N_{\mathcal{L}}^0(\mathcal{S})} G_M(\mathcal{S})$, où le morphisme de $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ dans $N_{\mathcal{L}}^0(\mathcal{S})$ est celui qui provient de la projection de $\mathcal{S}_K$ sur $\mathcal{S}_K/p\mathcal{S}$ et celui de $G_M(\mathcal{S})$ dans $N_{\mathcal{L}}^0(\mathcal{S})$ est φ_ρ.

Il est clair que toutes ces constructions sont fonctorielles en S.

Choisissons maintenant un p-groupe formel lisse G_k dont le module de Dieudonné $M_0 = \underline{M}(G_k)$ est isomorphe à M (un tel groupe existe et est unique, à isomorphisme près, d'après la proposition 6.1 du chapitre III) ainsi qu'un isomorphisme i de M sur M_0.

Soit R l'algèbre affine de G_k et choisissons un A-anneau spécial $\mathfrak{R}$ qui relève R. Choisissons enfin un isomorphisme ι de $\mathfrak{L}$ sur un sous-A-module $\mathfrak{L}_0$ de $P(\mathfrak{R})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dd, "\rho"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[r, hook] & P(\mathfrak{R}) \arrow[dr] & \\
 & & & P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R} \\
M \arrow[r, "i"] & M_0 \arrow[r, hook] & CW_k(R) \arrow[ur, "w_{\mathfrak{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (il est clair qu'un tel ι existe toujours) et notons ρ_0 l'application A-linéaire $i \circ \rho \circ \iota^{(-1)} : \mathfrak{L}_0 \to M_0$.

Pour tout A-anneau p-adique $\mathfrak{S}$, notons $X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$ l'ensemble des homomorphismes continus du A-anneau $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{S}$.

Si $x \in X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$, x se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme continu de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ dans $\mathfrak{S}_K$; nous notons $x_{\mathfrak{L}_0}$ sa restriction à $\mathfrak{L}_0$ et $x_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{S}_K$ l'application A-linéaire composée $x_{\mathfrak{L}_0} \circ \iota$.

De même x induit un homomorphisme continu $x_k : R \to \mathfrak{S}_k$ donc une application D_k-linéaire $CW_k(x_k) : CW_k(R) \to CW_k(\mathfrak{S}_k)$; nous notons x_{M_0} sa restriction à M_0 et $x_M : M \to CW_k(\mathfrak{S}_k)$ l'application D_k-linéaire composée $x_{M_0} \circ i$.

LEMME 1.3.- <u>Pour tout</u> $x \in X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$, $(x_{\mathfrak{L}}, x_M) \in G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$. <u>L'application</u> $x \mapsto (x_{\mathfrak{L}}, x_M)$ <u>de</u> $X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$ <u>dans</u> $G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$ <u>est bijective si</u> $p \neq 2$ <u>ou si</u> M <u>est unipotent (i.e. si</u> G_k <u>l'est)</u>.

La démonstration de ce lemme est renvoyée au n° 1.6.

1.4. Soit alors G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A et soit $\mathfrak{L}M_A(G) = (\mathfrak{L}, M, \rho)$. Il est clair que le lemme précédent s'applique en prenant $G_k = G \otimes_A k$, $M_0 = M$, $i = \mathrm{id}_M$, $\mathfrak{R}$ = l'algèbre affine de G, $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}$ et $\iota = \mathrm{id}_{\mathfrak{L}}$.

PROPOSITION 1.4.- <u>Soit</u> G <u>un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur</u> A, <u>soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>son algèbre affine, et soit</u> $(\mathfrak{L}, M, \rho) = \mathfrak{L}M_A(G)$. <u>Soit</u> $\mathfrak{S}$ <u>un A-anneau p-adique. Pour tout</u> $x \in G(\mathfrak{S}) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$, $(x_{\mathfrak{L}}, x_M) \in G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$ <u>et l'application</u> $x \mapsto (x_{\mathfrak{L}}, x_M)$ <u>est un homomorphisme du groupe</u> $G(\mathfrak{S})$ <u>dans</u> $G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$; <u>c'est un isomorphisme si</u> $p \neq 2$ <u>ou si</u> G <u>est unipotent</u>.

<u>Démonstration</u> : compte-tenu du lemme 1.3, il suffit de montrer que l'application $x \mapsto (x_{\mathfrak{L}}, x_M)$ est un homomorphisme de groupes, ou encore que chacune des deux applications $x \mapsto x_M$ et $x \mapsto x_{\mathfrak{L}}$ est un homomorphisme de groupes.

Pour l'application $x \mapsto x_M$ c'est clair : on voit que c'est le composé de l'application canonique de $G(\mathfrak{S})$ dans $G(\mathfrak{S}_k) = G_k(\mathfrak{S}_k)$ par l'isomorphisme canonique de $G_k(\mathfrak{S}_k)$ sur $G_M(\mathfrak{S})$ résultant de la proposition 6.2 du chapitre III.

Montrons donc que l'application $x \mapsto x_{\mathfrak{L}}$ est un homomorphisme de groupes. Soit $\Delta : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}$ le co-produit ; il se prolonge en une application $\Delta_K : \hat{\mathfrak{R}}_K^{an} \to \hat{\mathfrak{R}}_K^{an} \hat{\otimes}_A \hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$. Soit x et y des éléments de $G(\mathfrak{S})$ et soit $z = x + y$. Les applications x, y, z de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{S}$ se prolongent en des homomorphismes continus x_K, y_K, z_K de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ dans $\mathfrak{S}_K$. Si $\alpha \in \hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$, on voit que $z_K(\alpha) = (\pi_{\mathfrak{S}} \circ (x_K \hat{\otimes} y_K) \circ \Delta_K)(\alpha)$, où $\pi_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S}_K \hat{\otimes}_A \mathfrak{S}_K \to \mathfrak{S}_K$ est définie par la multiplication dans $\mathfrak{S}_K$. Si $\alpha \in \mathfrak{L}$, on a donc

$$\begin{aligned} z_{\mathfrak{L}}(\alpha) &= z_K(\alpha) = (\pi_{\mathfrak{S}} \circ (x_K \hat{\otimes} y_K))(\alpha \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \alpha) = \pi_S(x_{\mathfrak{L}}(\alpha) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} y_{\mathfrak{L}}(\alpha)) \\ &= x_L(\alpha) + y_L(\alpha) \quad ; \end{aligned}$$

d'où la proposition.

1.5. Montrons maintenant le théorème 1 pour $p \neq 2$ et pour les groupes unipotents (et p quelconque).

Il résulte du lemme de Yoneda qu'un groupe formel topologiquement plat sur A est complètement déterminé par la restriction du foncteur en groupes qu'il définit à la catégorie des A-anneaux p-adiques.

Si $p \neq 2$ et si $(\mathfrak{L}, M, \rho)$ est un objet de Λ_A^{ℓ} (resp. si p est quelconque et si $(\mathfrak{L}, M, \rho)$ est un objet de Λ_A^u), le lemme 1.3 implique qu'il existe un A-anneau spécial $\mathfrak{R}$ tel que, pour tout A-anneau p-adique $\mathfrak{S}$, $G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$ s'identifie à l'ensemble des homomorphismes continus de $\mathfrak{R}$ dans

$\mathcal{S}$, et ceci fonctoriellement en $\mathcal{S}$. On voit donc que $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}$ définit un p-groupe formel G lisse et de dimension finie sur A , dont l'algèbre affine est isomorphe à $\mathfrak{R}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{L}M_A(G)$ s'identifie à $(\mathcal{L},M,\rho)$ et que G est unipotent si M l'est. On en déduit que le foncteur $\mathcal{L}M_A$ est essentiellement surjectif.

Il reste donc à montrer que $\mathcal{L}M_A$ est pleinement fidèle : soit G et G' deux groupes formels lisses et de dimension finie sur A . Posons

$$\mathcal{L}M_A(G) = (\mathcal{L},M,\rho) \ , \quad \mathcal{L}M_A(G') = (\mathcal{L}',M',\rho') \ .$$

Avec des notations évidentes, il résulte de la proposition 1.4 que, pour tout A-anneau p-adique $\mathcal{S}$, $G'(\mathcal{S})$ (resp. $G(\mathcal{S})$) s'identifie canoniquement (et fonctoriellement en $\mathcal{S}$) à $N_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S}) \times_{N^0_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S})} G_{M'}(\mathcal{S})$ (resp. $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \times_{N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})} G_M(\mathcal{S})$) .

Soit f un morphisme de G' dans G et soit $\mathcal{L}M_A(f) = (\mathcal{L}(f), \underline{M}(f_k))$. Pour tout A-anneau p-adique $\mathcal{S}$, et tout $x = (x_{\mathcal{L}'}, x_{M'}) \in G'(\mathcal{S})$ on a $f_{\mathcal{S}}(x) = (x_{\mathcal{L}}, x_M)$ avec $x_{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{L}'} \circ \mathcal{L}(f)$ et $x_M = x_{M'} \circ \underline{M}(f_k)$; on voit donc que $x_{\mathcal{L}} = 0$ si $\mathcal{L}(f) = 0$ et $x_M = 0$ si $\underline{M}(f_k) = 0$; par conséquent, si $\mathcal{L}M_A(f) = 0$, on a $f_{\mathcal{S}}(x) = 0$, pour tout A-anneau p-adique $\mathcal{S}$ et tout $x \in G'(\mathcal{S})$, ce qui montre que $\mathcal{L}M_A$ est fidèle.

Si maintenant $u : (L,M,\rho) \to (L',M',\rho')$ est un morphisme de la catégorie Λ^{ℓ}_A (resp. Λ^u_A si $p=2$), il définit, de manière évidente, un morphisme $u_{\mathcal{S}} : N_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S}) \times_{N^0_{\mathcal{L}'}(\mathcal{S})} G_{M'}(\mathcal{S}) \to N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \times_{N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})} G_M(\mathcal{S})$, pour tout A-anneau p-adique $\mathcal{S}$, visiblement fonctoriel en $\mathcal{S}$. D'où une famille, fonctorielle en $\mathcal{S}$, de morphisme $f_{\mathcal{S}} : G'(\mathcal{S}) \to G(\mathcal{S})$, i.e. un morphisme $f : G' \to G$ tel que $\mathcal{L}M_A(f) = u$ et le foncteur $\mathcal{L}M_A$ est pleinement fidèle.

1.6. Nous reprenons les hypothèses et les notations du lemme 1.3 que nous nous proposons de démontrer maintenant. Nous posons $G(\mathcal{S}) = G_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ et nous utilisons l'application i (resp. ι) pour identifier M et M_0 (resp. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$).

Comme tout p-groupe formel sur k , G_k se décompose en le produit direct d'un groupe G^c_k connexe et d'un groupe G^{et}_k étale. Si R^c (resp. R^{et}) désigne l'algèbre affine de G^c_k (resp. G^{et}_k) , R^c et R^{et} s'identifient à des sous-anneaux de R et le produit définit un isomorphisme de $R^{et} \hat{\otimes}_k R^c$ sur

R . Nous notons $\mathfrak{R}^{et}$ le relèvement de R^{et} dans $\mathfrak{R}$ et nous choisissons un sous-anneau local $\mathfrak{R}^c$ de $\mathfrak{R}$ qui relève R^c ; ici encore le produit définit un isomorphisme de $\mathfrak{R}^{et} \hat{\otimes}_A \mathfrak{R}^c$ sur $\mathfrak{R}$.

Comme $G_k = G^c_k \times G^{et}_k$, on a $M = M^c \oplus M^{et}$, avec $M^c = \underline{M}(G^c_k)$ et $M^{et} = \underline{M}(G^{et}_k)$; tout élément $\underline{a} \in M$ s'écrit donc d'une manière et d'une seule sous la forme $\underline{a} = \underline{a}^c + \underline{a}^{et}$, avec $\underline{a}^c \in M^c \subset CW_k(R^c)$ et $\underline{a}^{et} \in M^{et} \subset CW_k(R^{et})$.

Soit $\alpha \in \mathcal{L}$ et soit $\underline{a} = \rho(\alpha) = \underline{a}^c + \underline{a}^{et}$; si $\underline{a}^c = (\dots, a^c_{-n}, \dots, a^c_{-1}, a^c_0)$ et $\underline{a}^{et} = (\dots, a^{et}_{-n}, \dots, a^{et}_{-1}, a^{et}_0)$ et si l'on choisit des relèvements $\hat{a}^c_{-n}$ des a^c_{-n} dans $\mathfrak{R}^c$ et $\hat{a}^{et}_{-n}$ des a^{et}_{-n} dans $\mathfrak{R}^{et}$, $w_{\mathfrak{R}}(\underline{a})$ est l'image, dans $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$ de $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}(\hat{a}^c_{-n})^{p^n} + \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}(\hat{a}^{et}_{-n})^{p^n}$. Comme $\underline{a} = \rho(\alpha)$, l'image de α dans $P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$ est $w_{\mathfrak{R}}(\underline{a})$ et l'on a donc $\alpha = \alpha^c + \alpha^{et} + p\beta$, avec $\alpha^c = \sum p^{-n}(\hat{a}^c_{-n})^{p^n} \in P(\mathfrak{R}^c)$, $\alpha^{et} = \sum p^{-n}(\hat{a}^{et}_{-n})^{p^n} \in P(\mathfrak{R}^{et})$ et $\beta \in \mathfrak{R}$.

Choisissons des coordonnées $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ pour $\mathfrak{R}^c$: l'anneau $\mathfrak{R}^c$ s'identifie donc à $A[[\underline{X}]] = A[[X_1,\dots,X_d]]$ et R^c à $k[[\underline{\tilde{X}}]] = k[[\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_d]]$, en notant $\tilde{X}_i$ l'image de X_i dans R .

Si maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ est une base du A-module libre $\mathcal{L}$, chaque α_i peut s'écrire, compte-tenu de ce qui précède, sous la forme

$$\alpha_i = \alpha^c_i + \alpha^{et}_i + p\beta_i \ ,$$

avec $\alpha^c_i \in P(\mathfrak{R}^c)$, $\alpha^{et}_i \in P(\mathfrak{R}^{et})$, $\beta_i \in \mathfrak{R}$; en particulier, chaque α^c_i peut être considéré comme une série formelle en les X_j à coefficients dans K .

Commençons par établir un autre lemme :

LEMME 1.5.-

i) <u>La matrice des</u> $\dfrac{\partial \alpha^c_i}{\partial X_j}$ <u>est à coefficients dans</u> $\mathfrak{R}^c$ <u>et inversible dans</u> $\mathfrak{R}^c$;

ii) <u>la matrice des</u> $\dfrac{\partial^p \alpha^c_i}{\partial X^p_j}$ <u>est à coefficients dans</u> $\mathfrak{R}^c$; <u>si</u> M <u>est unipotent (i.e. si</u> G_k <u>l'est), on peut choisir les coordonnées</u> X_j <u>et la base des</u> α_i <u>pour que cette matrice soit topologiquement nilpotente</u>.

<u>Démonstration</u> :

i) Si $\rho(\alpha_i) = \underline{a}^c_i + \underline{a}^{et}_i$ et si $\underline{a}^c_i = (\dots, a^c_{-n,i}, \dots, a^c_{0,i})$, on a

$\alpha_i^c = \sum p^{-n}(\hat{a}^c_{-n,i})^{p^n}$, pour des relèvements convenables $\hat{a}^c_{-n,i}$ des $a^c_{-n,i}$ dans $\mathfrak{R}^c$.

Notons $\mathfrak{m}$ (resp. $\hat{\mathfrak{m}}$) l'idéal maximal de R^c (resp. $\mathfrak{R}^c$) . Comme G_k^c est connexe, $M^c = \mathrm{Hom}(G_k^c, \widehat{CW}_k) = \mathrm{Hom}(G_k^c, \widehat{CW}_k^c)$ est contenu dans $CW_k^c(R^c)$, autrement dit tous les $a^c_{-n,i}$ sont dans $\mathfrak{m}$; par conséquent, tous les $\hat{a}^c_{-n,i}$ sont dans $\hat{\mathfrak{m}}$.

On a $$\frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j} = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{a}^c_{-n,i})^{p^n-1} \frac{\partial \hat{a}^c_{-n,i}}{\partial X_j} \in \mathfrak{R}^c .$$

De plus, comme les $\hat{a}^c_{-n,i}$ sont dans $\hat{\mathfrak{m}}$, $(\hat{a}^c_{-n,i})^{p^n-1} \in \hat{\mathfrak{m}}$, si $p^n - 1 \geq 1$, i.e. si $n \neq 0$, et $\dfrac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j} \equiv \dfrac{\partial \hat{a}^c_{0,i}}{\partial X_j} \pmod{\hat{\mathfrak{m}}}$.

On sait (cf. proposition 4.3 du chapitre III) que l'application qui à $\underline{a} = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) \in M^c$ associe l'image de a_0 dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, induit, par passage au quotient, un isomorphisme de $M^c/\underline{F}M^c$ sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $\left(\simeq t^*_{G_k^c}(k)\right)$; comme ρ induit un isomorphisme $\tilde{\rho} : \mathfrak{L}/p\mathfrak{L} \to M/\underline{F}M$ et comme la projection de M sur M^c induit un isomorphisme de $M/\underline{F}M$ sur $M^c/\underline{F}M^c$, on en déduit que les images des $a^c_{0,i}$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ forment une base du k-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; il en résulte que la matrice des $\dfrac{\partial a^c_{0,i}}{\partial X_j}$ est inversible dans R^c ; on voit qu'il en est de même de celle des $\dfrac{\partial \hat{a}^c_{0,i}}{\partial X_j}$, donc aussi de celle des $\dfrac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}$, dans $\mathfrak{R}^c$.

ii) Il est clair que $$\frac{\partial^p \alpha_i^c}{\partial X_j^p} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial X_j^{p-1}} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial X_j} \right) \in \mathfrak{R}^c .$$

Posons, pour $1 \leq i \leq d$, $\hat{a}^c_{-1,i} = pb_i + \sum_{j=1}^{d} c_{i,j} X_j$ + termes de d° ≥ 2 (avec les b_i et les $c_{i,j}$ dans A). En utilisant le fait que les $\hat{a}^c_{-n,i}$ sont tous dans $\hat{\mathfrak{m}}$, on voit que $\dfrac{\partial^p \alpha_i^c}{\partial X_j^p} \equiv p^{-1}.p!.c^p_{i,j} \equiv -c^p_{i,j} \pmod{\hat{\mathfrak{m}}}$.

Il est clair que la matrice des $\dfrac{\partial^p \alpha_i^c}{\partial X_j^p}$ est topologiquement nilpotente si et seulement si la matrice des $-c^p_{i,j}$ l'est, ou encore si et seulement si la matrice des $\tilde{c}_{i,j}$ est nilpotente dans k (en notant $\tilde{c}_{i,j}$ l'image de $c_{i,j}$ dans k).

Dire que M est unipotent revient à dire que l'action de $\underline{V}$ sur M/pM est nilpotente ; il revient au même de dire que l'action de $\underline{V}$ sur $M/\underline{F}M$ l'est ; on en déduit que l'on peut trouver une base $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_d)$ de $M/\underline{F}M$ sur k telle que $\underline{V}\tilde{a}_d = 0$ et, pour $1 \leq i < d$, $\underline{V}\tilde{a}_i =$ ou bien 0 ou bien $\tilde{a}_{i+1}$.

Choisissons, pour $1 \leq i \leq d$, un élément α_i de $\mathfrak{L}$ tel que l'image de $\rho(\alpha_i)$ dans $M/\underline{F}M$ soit $\tilde{a}_i$: le fait que ρ induise un isomorphisme de $\mathfrak{L}/p\mathfrak{L}$ sur $M/\underline{F}M$ implique que de tels α_i existent et forment une base du A-module libre $\mathfrak{L}$.

L'isomorphisme composé $\mathfrak{L}/p\mathfrak{L} \to M/\underline{F}M \to M^c/\underline{F}M^c \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nous montre que, si l'on note X_i un relèvement de $\hat{a}_{0,i}$ dans $\mathfrak{R}^c$, les X_i forment un système de coordonnées pour $\mathfrak{R}^c$. L'image de $\underline{V}\underline{a}_i^c = (\ldots, a^c_{-n-1,i}, \ldots, a^c_{-1,i})$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est l'image de $a^c_{-1,i}$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et c'est donc aussi celle de $\sum_{j=1}^{d} c_{i,j} X_j$; mais, comme la projection de $M/\underline{F}M$ sur $M^c/\underline{F}M^c$ est un $k[\underline{V}]$-isomorphisme, on voit que l'image de $\underline{V}\underline{a}_i^c$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est aussi celle de $\underline{V}\tilde{a}_i$ qui vaut ou bien 0 ou bien $\tilde{a}_{i+1}$; on voit donc que l'image de $\underline{V}\underline{a}_i^c$ dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est 0 , sauf si $\underline{V}\tilde{a}_i = \tilde{a}_{i+1}$, auquel cas c'est l'image de X_{i+1} . Finalement les $\tilde{c}_{i,j}$ sont nuls, sauf peut-être certains des $\tilde{c}_{i,i+1}$ pour $1 \leq i < d$ et la matrice des $\tilde{c}_{i,j}$ est bien nilpotente.

Démontrons maintenant le lemme 1.3

Montrer que $(x_{\mathfrak{L}}, x_M) \in G(\mathfrak{S})$ revient à montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L} \arrow[r, "x_{\mathfrak{L}}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{S}_K \arrow[dr, "\text{proj.}"] & \\
M \arrow[r, "x_M"] & CW_k(\mathfrak{S}_k) \arrow[r, "w_{\mathfrak{S}}"] & \mathfrak{S}_K/p\mathfrak{S}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Soit $\alpha \in \mathfrak{L}$ et soit $\underline{a} = (\ldots, a_{-n}, \ldots, a_0) = \rho(\alpha)$. On peut choisir des relèvements $\hat{a}_{-n}$ des a_{-n} dans $\mathfrak{R}$ pour que $\alpha = \sum p^{-n} \hat{a}_{-n}^{p^n}$; on a alors $x_{\mathfrak{L}}(\alpha) = \sum p^{-n} (x(\hat{a}_{-n})^{p^n})$.

D'autre part, on a $x_M(\rho(\alpha)) = (\ldots, x_k(a_{-n}), \ldots, x_k(a_0))$ et $(w_{\mathfrak{S}} \circ x_M \circ \rho)(\alpha)$ est l'image dans $\mathfrak{S}_K/p\mathfrak{S}$ de $\sum p^{-n} \hat{b}_{-n}^{p^n}$, en désignant par $\hat{b}_{-n}$ un relèvement quelconque dans $\mathfrak{S}$ de $x_k(a_{-n})$; il est clair que l'on peut choisir $\hat{b}_{-n} = x(\hat{a}_{-n})$ et on en déduit que $(w_{\mathfrak{S}} \circ x_M \circ \rho)(\alpha)$ est l'image de $x_{\mathfrak{L}}(\alpha)$ dans $\mathfrak{S}_K/p\mathfrak{S}$, ce qui démontre la première partie du lemme.

Soit ξ une application A-linéaire de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}_K$ et soit η une application D_k-linéaire continue de M dans $CW_k(\mathcal{S}_k)$ telles que $(\xi,\eta)\in G(\mathcal{S})$. Pour achever la démonstration du lemme, il faut montrer qu'il existe un homomorphisme continu $x:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ et un seul tel que $x_{\mathcal{L}}=\xi$ et $x_M=\eta$.

D'après la proposition 6.2 du chapitre III, $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$ s'identifie à $G_k(\mathcal{S}_k)$: plus précisément, il existe un homomorphisme continu $x_k : R\to \mathcal{S}_k$ et un seul tel que $\eta(\underline{a}) = CW_k(x_k)(\underline{a})$, pour tout $\underline{a}\in M$.

Choisissons alors des X_i et des α_j comme dans le lemme 1.5 et cherchons quels sont les homomorphismes continus $x:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ tels que $x_M=\eta$, ou, ce qui revient au même, qui relèvent x_k :

Si l'on note x_k^{et} la restriction de x_k à R^{et}, on voit que x_k^{et} se relève, de manière unique, en un homomorphisme continu $x^{et}:\mathcal{R}^{et}\to\mathcal{S}$; si de plus, on pose $\tilde{x}_i = x_k(\tilde{X}_i)\in \mathcal{S}_k$, on voit que la restriction de x à $\mathcal{R}^c$ est déterminée par le d-uple $(x_1,x_2,\dots,x_d)$, avec $x_i=x(X_i)$, et que les x_i peuvent être des éléments quelconques de $\mathcal{S}$ relevant les $\tilde{x}_i$. Comme $\mathcal{R}$ s'identifie à $\mathcal{R}^{et}\hat{\otimes}_A\mathcal{R}^c$, on a ainsi obtenu une bijection entre les $x:\mathcal{R}\to\mathcal{S}$ tels que $x_M=\eta$ et les d-uples $(x_1,\dots,x_d)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ relevant les $\tilde{x}_i$.

Si maintenant x est un relèvement quelconque de x_k, on voit, d'après la première partie du lemme, que $(x_{\mathcal{L}},x_M)=(x_{\mathcal{L}},\eta)\in G(\mathcal{S})$ et on en déduit que le composé de $x_{\mathcal{L}}$ avec la projection de $\mathcal{S}_K$ sur $\mathcal{S}_K/p\mathcal{S}$ est égal au composé de x avec cette projection ; on en déduit que, pour tout $\alpha\in\mathcal{L}$, $x_{\mathcal{L}}(\alpha)-\xi(\alpha)\in p\mathcal{S}$.

On voit donc que, pour achever la démonstration du lemme, il suffit d'établir le résultat suivant :

soit r un entier ≥ 1. Supposons qu'il existe un d-uple $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_d^0)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ relevant les $\tilde{x}_i$, uniquement déterminé modulo p^r, tel que $x^0_{\mathcal{L}}(\alpha)-\xi(\alpha)\in p^r\mathcal{S}$, pour tout $\alpha\in\mathcal{L}$. Il existe alors un d-uple $(x_1,x_2,\dots,x_d)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ relevant les x_i, uniquement déterminé modulo p^{r+1}, tel que $x_{\mathcal{L}}(\alpha)-\xi(\alpha)\in p^{r+1}\mathcal{S}$, pour tout $\alpha\in\mathcal{L}$ (on a noté x^0 (resp. x) le relèvement de x_k associé au d-uple $(x_1^0,\dots,x_d^0)$ (resp. $(x_1,\dots,x_d)$)).

Pour le montrer, posons, pour $1\le i\le d$, $x_L^0(\alpha_i)=\xi(\alpha_i)+p^r\gamma_i$, avec

$\gamma_i\in\mathcal{S}$. On voit que, avec des notations évidentes,

$$x^0_{\mathcal{L}}(\alpha_i) = \alpha_i^c(x_1^0,\dots,x_d^0) + x^{et}_{\mathcal{L}}(\alpha_i^{et}) + px^0(\beta_i).$$

Pour $1\le i\le d$, posons $x_i = x_i^0+p^r y_i$, où les y_i sont des éléments quelconques de $\mathcal{S}$. On a

$$x_{\mathcal{L}}(\alpha_i) = \alpha_i^c(x_1,\dots,x_d)+x^{et}_{\mathcal{L}}(\alpha_i^{et})+px(\beta_i).$$

Comme $x(X_j)\equiv x^0(X_j) \pmod{p^r\mathcal{S}}$, pour tout j, on voit que $x(\beta_i)\equiv x^0(\beta_i)$ $(\mathrm{mod}\ p^r\mathcal{S})$, pour tout i. On en déduit que

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{L}}(\alpha_i) &\equiv \alpha_i^c(x_1,\dots,x_d) + x^{et}_{\mathcal{L}}(\alpha_i^{et}) + px^0(\beta_i)\\ &\equiv x_L^0(\alpha_i) + \alpha_i^c(x_1,\dots,x_d) - \alpha_i^c(x_1^0,\dots,x_d^0)\\ &\equiv \xi(\alpha_i) + p^r\gamma_i + \alpha_i^c(x_1,\dots,x_d) - \alpha_i^c(x_1^0,\dots,x_d^0) \pmod{p^{r+1}\mathcal{S}}. \end{aligned}$$

Posons $\underline{x}=(x_1,\dots,x_d)$ et $\underline{x}^0=(x_1^0,\dots,x_d^0)$. Pour tout $\underline{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d$, posons $|\underline{n}|=n_1+\dots+n_d$, $n!=n_1!\dots n_d!$,

$$\frac{\partial^{|\underline n|}}{\partial \underline{X}^{\underline n}} = \frac{\partial^{|\underline n|}}{\partial X_1^{n_1}\dots\partial X_d^{n_d}}$$ et $\underline{y}^{\underline n} = y_1^{n_1}\dots y_d^{n_d}$. On a $\alpha_i^c(\underline x)-\alpha_i^c(\underline x^0) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{rn}\sum_{|\underline n|=n} u_{\underline n}$,

avec $u_{\underline n} = \dfrac{1}{\underline n!}\cdot\dfrac{\partial^{|\underline n|}\alpha_i^c}{\partial\underline X^{\underline n}}(\underline x^0)\cdot \underline y^{\underline n}$.

Soit $\underline n\in\mathbb{N}^d$, avec $n=|\underline n|\ge 2$ et soit s un entier tel que $n_s\ge 1$, et $\underline m=(n_1,\dots,n_{s-1},n_s-1,n_{s+1},\dots,n_d)$. On a

$$u_{\underline n} = \frac{1}{\underline n!}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial\underline X^{\underline m}}\left(\frac{\partial\alpha_i^c}{\partial X_s}\right)(\underline x^0)\cdot\underline y^{\underline n} = \frac{1}{n_s}\cdot\frac{1}{\underline m!}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial \underline X^{\underline m}}\left(\frac{\partial\alpha_i^c}{\partial X_s}\right)(\underline x^0)\cdot\underline y^{\underline n},$$

donc $n_s u_{\underline n}\in\mathcal{S}$.

Soit v_p la valuation p-adique. Si $rn-v_p(n_s)\ge r+1$, on voit que $p^{rn}u_{\underline n}\in p^{r+1}\mathcal{S}$. Or

- si $2\le n<p$, n_s est premier à p et $r_n - v_p(n_s) = rn\ge 2r\ge r+1$;
- si $p^t\le n<p^{t+1}$, avec t entier ≥ 1, on a $n_s\le n<p^{t+1}$, donc $v_p(n_s)\le t$ et $rn-v_p(n_s)\ge rp^t-t\ge r+1$, sauf si on a simultanément $r=1$, $p=2$ et $t=1$;
- si $r=1$, $p=2$ et si $n=2$ ou 3, on voit que $n-v_2(n_s)\ge 2$, sauf si n est de la forme $(0,\dots,0,2,0,\dots,0)$.

Finalement, on voit que

$$\alpha_i^c(\underline{x}) - \alpha_i^c(\underline{x}^0) \equiv p^r \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\, y_j \pmod{p^{r+1}\mathfrak{S}} ,$$

sauf, peut-être, si $p = 2$ et $r = 1$, auquel cas on a

$$\alpha_i^c(\underline{x}) - \alpha_i^c(\underline{x}^0) \equiv 2\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\right)\cdot y_j + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 \alpha_i^c}{\partial X_j^2}(\underline{x}^0)\cdot y_j^2 \pmod{4\mathfrak{S}} .$$

Supposons d'abord $p \neq 2$ ou $p = 2$ et $r \geq 2$. On a alors, pour tout i,

$$x_L(\alpha_i) \equiv \xi(\alpha_i) + p^r\left(\gamma_i + \sum \frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\cdot y_j\right) \pmod{p^{r+1}\mathfrak{S}} .$$

Les y_j doivent donc être solutions du système d'équations

$$\gamma_i + \sum \frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\cdot y_j \equiv 0 \pmod{p\mathfrak{S}} .$$

Comme la matrice des $\frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}$ est inversible dans $\mathfrak{R}^c$, on voit que l'image, dans $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}/p\mathfrak{S}$, de celle des $\frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)$ est inversible ; le système d'équations linéaires ci-dessus admet donc une solution et une seule modulo p, d'où le résultat.

Supposons enfin $p = 2$ et $r = 1$. Le même raisonnement montre que l'on doit résoudre le système d'équations

$$\gamma_i + \sum \frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\cdot y_j + \sum \frac{\partial^2 \alpha_i^c}{\partial X_j^2}(\underline{x}^0)\cdot y_j^2 \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{S}} .$$

On voit que l'image, dans $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}/2\mathfrak{S}$, de la matrice des $\frac{\partial \alpha_i^c}{\partial X_j}(\underline{x}^0)$ (resp. des $\frac{\partial^2 \alpha_i^c}{\partial X_j^2}(\underline{x}^0)$) est inversible (resp. nilpotente) et l'on en déduit facilement l'existence et l'unicité d'une solution modulo 2.

1.7. Nous allons maintenant indiquer comment on peut modifier les constructions des numéros précédents pour obtenir un analogue de la proposition 1.4 et une démonstration du théorème 1 pour les groupes connexes (pour p quelconque, bien qu'il suffirait, évidemment, de le faire pour $p = 2$).

Soit G un p-groupe formel connexe sur k (pas nécessairement lisse) qui est réunion de ses sous-groupes finis, soit R son algèbre affine et soit $\mathfrak{r}_R$ l'idéal maximal de R. Notons $R^\#$ le A-anneau profini $A \oplus \mathfrak{r}_R$ (la structure de A-module topologique est claire, le produit est défini par

$(\lambda.1+a)(\mu.1+b) = \lambda\mu.1 + (\lambda b+\mu a+ab)$, si $\lambda,\mu \in A$ et $a,b \in \mathfrak{r}_R$). On voit que $R^\# \otimes_A k = R^\#/pR^\#$ s'identifie à R et il est clair qu'il existe sur $R^\#$ une structure de bigèbre formelle et une seule telle que $\mathfrak{r}_R$ soit l'idéal d'augmentation de $R^\#$ et que la structure de bigèbre formelle induite sur R, par passage au quotient, soit celle provenant de G ; nous notons $G^\#$ le A-groupe formel dont l'algèbre affine est $R^\#$.

Soit S un A-anneau (muni de la topologie discrète) et soit $\mathfrak{r}_S$ son nilradical ; supposons que $p\mathfrak{r}_S = 0$. Notons S' le k-anneau $S' = k \oplus \mathfrak{r}_S$; on voit que le nilradical de S' s'identifie à $\mathfrak{r}_S$; si $x \in G^\#(S)$, x est une application continue de R dans S et envoie $\mathfrak{r}_R$ dans $\mathfrak{r}_S$; on en déduit que le groupe $G^\#(S)$ s'identifie au groupe $G(S')$. D'après la proposition 6.2 du chapitre III, le groupe $G(S')$ s'identifie au groupe $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(S'))$ des applications D_k-linéaires continues de $M = \underline{M}(G)$ dans $CW_k(S')$. Si l'on note $CW_k(\mathfrak{r}_S)$ le sous-D_k-module fermé de $CW_k(S')$ formé des covecteurs dont toutes les composantes sont dans $\mathfrak{r}_S$, on voit que

$$CW_k(S') = CW_k(k) \oplus CW_k(\mathfrak{r}_S) .$$

Comme G est connexe, on a

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(k)) \simeq G(k) = 0 \quad \text{et}$$

$$\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(S')) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(\mathfrak{r}_S)) .$$

D'où un isomorphisme canonique $u_G^\#(S)$ de $G^\#(S)$ sur $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(\mathfrak{r}_S))$: si $x \in G^\#(S)$, $u_G^\#(S)(x)$ est l'application qui à $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0) \in M$ associe $(\dots, x(a_{-n}), \dots, x(a_0)) \in CW_k(\mathfrak{r}_S)$ (le fait que $\underline{a} \in M$ implique que tous les a_{-n} sont dans $\mathfrak{r}_R$).

Soit maintenant $\mathfrak{S}$ un A-anneau p-adique et soit $\mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}$ l'idéal de $\mathfrak{S}$ formé des x tels que $x^n \in p\mathfrak{S}$, pour n suffisamment grand. Si l'on pose $S = \mathfrak{S}/p\mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}$, S est un A-anneau dont le nilradical $\mathfrak{r}_S = \mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}/p\mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}$ vérifie $p\mathfrak{r}_S = 0$, et la topologie induite sur S par la topologie p-adique sur $\mathfrak{S}$ est la topologie discrète.

Posons $\mathfrak{S}_K = \mathfrak{S} \otimes_A K$. Soit $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0) \in CW_k(\mathfrak{r}_S)$; pour tout n, soit $\hat{a}_{-n}$ un relèvement de a_{-n} dans $\mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}$; on voit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\hat{a}_{-n}^{p^n}$ converge dans $\mathfrak{S}_K$ et que son image $w_{\mathfrak{S}}^\#(\underline{a})$ dans $\mathfrak{S}_K/p\mathfrak{r}_{\mathfrak{S}}$ ne dépend pas du choix des relèvements des a_{-n} ; on voit facilement que l'application $w^{\#}_{\mathcal{S}} : CW_k(r_{\mathcal{S}}) \to \mathcal{S}_K/pr_{\mathcal{S}}$ ainsi définie est A-linéaire.

Soit $(\mathcal{L}, M, \rho)$ un objet de Λ^c_A. Soit $\mathcal{S}$ un A-anneau p-adique et soit $r_{\mathcal{S}} = \{x \in \mathcal{S} \mid x^n \in p\mathcal{S}$, pour n assez grand$\}$:

- comme au n° 1.3, nous notons $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ le groupe $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K)$ des applications A-linéaires de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}_K = \mathcal{S} \otimes_A K$, et nous notons $N^{\#}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ le quotient $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K/pr_{\mathcal{S}})$;
- nous notons $G^{\#}_M(\mathcal{S})$ le groupe $\mathrm{Hom}^{cont}_{D_k}(M, CW_k(r_{\mathcal{S}}/pr_{\mathcal{S}}))$ des applications D_k-linéaires continues de M dans $CW_k(r_{\mathcal{S}}/pr_{\mathcal{S}})$;
- nous notons $\varphi^{\#}_\rho$ l'application de $G^{\#}_M(\mathcal{S})$ dans $N^{\#}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ qui à $u \in G^{\#}_M(\mathcal{S})$ associe $w^{\#}_{\mathcal{S}} \circ u \circ \rho$; il est clair que c'est un homomorphisme de groupes ;
- enfin, nous notons $G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ le produit fibré $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \times_{N^{\#}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})} G^{\#}_M(\mathcal{S})$, où le morphisme de $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ dans $N^{\#}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ est celui qui provient de la projection canonique de $\mathcal{S}_K$ sur $\mathcal{S}_K/pr_{\mathcal{S}}$ et celui de $G^{\#}_M(\mathcal{S})$ dans $N^{\#}_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ est $\varphi^{\#}_\rho$.

Il est clair que toutes ces constructions sont fonctorielles en $\mathcal{S}$ et nous permettent de considérer $G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}$ comme un foncteur covariant de la catégorie des A-anneaux p-adiques dans celle des groupes abéliens.

Choisissons maintenant un p-groupe formel lisse G_k dont le module de Dieudonné $M_0 = \underline{M}(G_k)$ est isomorphe à M (un tel groupe existe, est unique à isomorphisme près et est connexe) ainsi qu'un isomorphisme i de M sur M_0 .

Soit R l'algèbre affine de G_k et choisissons un A-anneau spécial $\mathcal{R}$ qui relève R , ainsi qu'une augmentation ε , i.e. un homomorphisme continu du A-anneau profini $\mathcal{R}$ sur A , et notons $\mathcal{R}^\varepsilon$ le noyau de ε .

Le D_k-module topologique $CW^c_k(R)$ est formé des covecteurs dont les composantes sont toutes dans l'idéal maximal r_R de R . Si $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0) \in CW^c_k(R)$ et si l'on choisit des relèvements $\hat{a}_{-n}$ des a_{-n} dans $\mathcal{R}^\varepsilon$ (et pas seulement dans $\mathcal{R}$), on voit que l'image $w^\varepsilon_{\mathcal{R}}(\underline{a})$ de $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\hat{a}^{p^n}_{-n}$ dans $P(\mathcal{R})/pr_{\mathcal{R}}$ (où $r_{\mathcal{R}}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{R}$) ne dépend pas du choix de ces relèvements ; on vérifie encore que l'application

$$w^\varepsilon_{\mathcal{R}} : CW^c_k(\mathcal{R}) \longrightarrow P(\mathcal{R})/pr_{\mathcal{R}}$$

ainsi définie est A-linéaire continue.

Choisissons enfin un isomorphisme ι de $\mathcal{L}$ sur un sous-A-module $\mathcal{L}_0$ de $P(\mathcal{R})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dd, "\rho"'] & \mathcal{L}_0 \arrow[r, hook] & P(\mathcal{R}) \arrow[dr] & \\
 & & & P(\mathcal{R})/pr_{\mathcal{R}} \\
M \arrow[r, "i"] & M_0 \arrow[r, hook] & CW^c_k(R) \arrow[ur, "w^\varepsilon_{\mathcal{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (l'existence d'un tel ι est claire).

Pour tout A-anneau p-adique $\mathcal{S}$ notons, comme en 1.3, $X_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ l'ensemble des homomorphismes continus du A-anneau $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{S}$. A $x \in X_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ on associe, comme en 1.3, un élément $x_{\mathcal{L}}$ de $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$. On lui associe aussi un élément x^ε_M de $G^{\#}_M(\mathcal{S})$ de la manière suivante :

le A-anneau profini $\mathcal{R}/p\mathcal{R}^\varepsilon$ s'identifie à $R^{\#}$; on a $x(\mathcal{R}^\varepsilon) \subset x(r_{\mathcal{R}}) \subset r_{\mathcal{S}}$ et x définit, par passage aux quotients, un homomorphisme continu $x^\varepsilon_k : R^{\#} \to \mathcal{S}/pr_{\mathcal{S}}$; il lui correspond donc un élément $x^\varepsilon_{M_0} = u^{\#}_G(\mathcal{S}/pr_{\mathcal{S}})(x^\varepsilon_k)$ de $\mathrm{Hom}^{cont}_{D_k}(M_0, CW_k(r_{\mathcal{S}}/pr_{\mathcal{S}}))$ et $x^\varepsilon_M = x^\varepsilon_{M_0} \circ i$.

LEMME 1.3'.- <u>Pour tout</u> $x \in X_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})$, $(x_{\mathcal{L}}, x^\varepsilon_M) \in G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$. <u>L'application</u> $x \mapsto (x_{\mathcal{L}}, x^\varepsilon_M)$ <u>de</u> $X_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})$ <u>dans</u> $G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ <u>est bijective</u>.

La démonstration est entièrement analogue à celle du lemme 1.3. Avec les conventions employées dans la démonstration de ce lemme, on voit que le seul problème est pour $p = 2$ et $r = 1$ où l'on est ramené à résoudre un système d'équations du type

$$\gamma_i + \sum \frac{\partial\alpha^c_i}{\partial X_j}(\underline{x}^0)\cdot y_j + \sum \frac{\partial^2\alpha^c_i}{\partial X_j^2}(\underline{x}^0)\cdot y_j^2 \equiv 0 \pmod{2\mathcal{S}}$$

dont on veut montrer qu'il admet une solution $(y_1, y_2, \dots, y_d)$ formée d'éléments de $r_{\mathcal{S}}$ et que cette solution est unique modulo $2\mathcal{S}$; on sait encore que l'image, dans $\mathcal{S}/2\mathcal{S}$, de la matrice des $\frac{\partial\alpha^c_i}{\partial X_j}(\underline{x}^0)$ est inversible ; il n'est plus toujours vrai que l'image de celle des $\frac{\partial^2\alpha^c_i}{\partial X_j^2}(\underline{x}^0)$ est nilpotente, mais on sait que les γ_i sont dans $r_{\mathcal{S}}$; l'existence et l'unicité s'en déduisent facilement.

Soit alors G un p-groupe formel lisse et connexe, de dimension finie sur A , et soit $\mathcal{L}M_A(G) = (\mathcal{L}, M, \rho)$. Il est clair que le lemme précédent s'applique en prenant $G_k = G \otimes_A k$, $M_0 = M$, $i = \mathrm{id}_M$, $\mathcal{R}$ = l'algèbre affine de G , ε = l'augmentation provenant de G , $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ et $\iota = \mathrm{id}_{\mathcal{L}}$.

PROPOSITION 1.4'.- *Soit* G *un p-groupe formel lisse et connexe, de dimension finie sur* A , *soit* $\mathcal{R}$ *son algèbre affine et soit* $(\mathcal{L},M,\rho) = \mathcal{L}M_A(G)$. *Soit* $\mathcal{S}$ *un A-anneau p-adique. Pour tout* $x \in G(\mathcal{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{R},\mathcal{S})$, $(x_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}, x_M^{\varepsilon}) \in G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ *et l'application* $x \to (x_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}, x_M^{\varepsilon})$ *est un isomorphisme du groupe* $G(\mathcal{S})$ *sur* $G^{\#}_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$.

La démonstration de cette proposition est entièrement analogue à celle de la proposition 1.4. Le théorème 1 dans le cas connexe se déduit du lemme 1.3' et de la proposition 1.4' de la même manière qu'il se déduit, dans le cas $p \neq 2$, du lemme 1.3 et de la proposition 1.4.

1.8. Le théorème 1 implique le résultat suivant, d'ailleurs bien connu :

COROLLAIRE.- *Tout groupe formel lisse et de dimension finie sur* k *admet un relèvement lisse sur* A .

Soit, en effet, G un tel groupe formel. Il s'écrit sous la forme $G = G^c \times G^{et}$, avec G^c connexe et G^{et} étale ; comme il est clair que G^{et} se relève, il suffit de vérifier que G^c se relève. Soit d sa dimension et soit M son module de Dieudonné ; soit $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_d$ des éléments de M qui relèvent une base de $M/\underline{F}M$ sur k ; soit $e_1, e_2, \dots, e_d$ la base canonique du A-module libre A^d et soit ρ l'application A-linéaire de A^d dans M définie par $\rho(e_i) = \underline{a}_i$, pour $1 \le i \le d$. On voit que (A^d, M, ρ) est un objet de Λ_A^c qui définit un groupe formel lisse sur A relevant G^c .

1.9. *Remarque* : soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A. Si $p = 2$, supposons G connexe ou unipotent. Soit $(\mathcal{L},M,\rho) = \mathcal{L}M(G)$. On peut décrire le groupe $G(S)$ des points de G à valeurs dans n'importe quel A-anneau fini S à l'aide du triplet $(\mathcal{L},M,\rho)$. En effet, on vérifie facilement que l'on peut trouver un A-anneau p-adique $\mathcal{S}$ (qui est un A-module libre de rang fini) et un homomorphisme de $\mathcal{S}$ sur S . Soit $\mathfrak{a}$ le noyau de cet homomorphisme. Comme G est lisse, l'homomorphisme de $G(\mathcal{S})$ dans $G(S)$ est surjectif et il suffit donc de savoir décrire son noyau. Si $\mathcal{R}$ est l'algèbre affine de G et si $\mathcal{R}^+$ est l'idéal d'augmentation, on voit que ce noyau est le sous-groupe $G(\mathfrak{a})$ de $G(\mathcal{S})$ formé des $x : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ tels que $x(\mathcal{R}^+) \subset \mathfrak{a}$. Le

A-module libre de rang fini $A \oplus \mathfrak{a}$ peut être muni d'une manière évidente d'une structure de A-anneau p-adique telle que la projection sur la première composante soit un homomorphisme d'anneaux. On voit que $G(\mathfrak{a})$ s'identifie au noyau de la projection de $G(A \oplus \mathfrak{a})$ sur $G(A)$.

1.10. Appelons *système de Honda lisse sur* A tout couple (L,M)

- où M est un D_k-module profini sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective, tel que le quotient $M/\underline{F}M$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k ,
- où L est un sous-A-module de M vérifiant $\underline{F}M \cap L = pL$ et $L/pL = M/\underline{F}M$.

Les systèmes de Honda lisses sur A forment une catégorie H_A^{ℓ} : un morphisme $u : (L,M) \to (L',M')$ est une application D_k-linéaire continue de M dans M' telle que $u(L) \subset L'$.

Il est clair que la catégorie H_A^{ℓ} est additive.

Il existe un foncteur additif évident $H : \Lambda_A^{\ell} \to H_A^{\ell}$: à un triplet $(\mathcal{L},M,\rho)$ on associe le couple (L,M) où $L = \rho(\mathcal{L})$. On voit que H n'est pas pleinement fidèle. Cependant, on vérifie immédiatement :

- que H est essentiellement surjectif ;
- que deux objets de Λ_A^{ℓ} sont isomorphes si et seulement si leurs images par H sont isomorphes dans H_A^{ℓ} .

Si l'on note LM_A le foncteur $H \circ \mathcal{L}M_A$, on voit donc que tout p-groupe formel G lisse et de dimension finie sur A est déterminé, à isomorphisme près, par $LM_A(G)$.

En particulier, soit G_k un p-groupe formel, lisse et de dimension finie sur k ; si $p = 2$ supposons G_k connexe ou unipotent. On voit que déterminer les classes d'isomorphismes des relèvements lisses de G_k sur A revient à déterminer les classes d'isomorphisme des couples (L,M) de H_A^{ℓ} où $M = \underline{M}(G_k)$. Le groupe $\mathrm{Aut}(M)$ des automorphismes continus du D_k-module topologique M (qui est isomorphe au groupe des automorphismes de G_k) opère à gauche sur l'ensemble $\Lambda(M)$ des sous-A-modules L de M vérifiant $\underline{F}M \cap L = pL$ et $L/pL = M/\underline{F}M$; les classes d'isomorphismes des relèvements lisses de G_k correspondent alors aux classes de $\Lambda(M)$ suivant $\mathrm{Aut}(M)$.

Remarque 1 : nous verrons au §2 du chapitre V que la classification des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A par leurs systèmes de Honda n'est autre, dans le cas connexe, que celle qui avait été obtenue par Honda ([32], au langage près et par des méthodes complètement différentes, la théorie de Honda ne donne pas de description de $G(\mathcal{S})$, elle consiste à construire explicitement la loi de groupe formel). C'est pourquoi nous avons employé l'expression de "système de Honda", bien que des objets du même type aient été aussi considérés par Grothendieck ([29]).

Soit maintenant G un groupe p-divisible sur A . Il est clair qu'il revient au même de dire que G est un p-groupe formel, lisse et de dimension finie sur A , tel que G_k est un groupe p-divisible sur k . Par conséquent (cf. rem. 3 du n° III.6.1), un p-groupe formel G , lisse et de dimension finie sur A , est un groupe p-divisible si et seulement si $\underline{M}(G_k)$ est un A-module libre de rang fini.

Notons alors Λ_A^d (resp. H_A^d) la sous-catégorie pleine de Λ_A^ℓ (resp. H_A^ℓ) dont les objets sont les $(\mathcal{L},M,\rho)$ (resp. les (L,M)) tels que M est un A-module libre de rang fini. Si $(\mathcal{L},M,\rho)$ est un objet de Λ_A^d , on voit que $\rho : \mathcal{L} \to M$ est injective et on en déduit que la restriction du foncteur H à Λ_A^d définit une équivalence entre la catégorie Λ_A^d et H_A^d .

Si l'on note $H_A^{d,c}$ (resp. $H_A^{d,u}$) la sous-catégorie pleine de H_A^d dont les objets sont les couples (L,M) tels que M est connexe (resp. unipotent), le théorème 1 implique alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1.6.- <u>Si</u> $p \neq 2$, <u>le foncteur</u> LM_A <u>induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles sur</u> A <u>et la catégorie</u> H_A^d .

<u>Pour</u> p <u>quelconque, le foncteur</u> LM_A <u>induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles connexes (resp. unipotents) sur</u> A <u>et la catégorie</u> $H_A^{d,c}$ <u>(resp.</u> $H_A^{d,u}$) .

On obtient ainsi les résultats annoncés dans [21]. Profitons-en pour signaler que le théorème 2' de [21] n'est énoncé correctement que pour $p \neq 2$. L'énoncé correct dans le cas général est la proposition 1.6 ci-dessus.

Remarque 2 : soit G un groupe p-divisible sur A et soit, pour tout entier

n , G_n le sous-groupe de G noyau de la multiplication par p^n . Soit $\mathcal{S}$ un A-anneau p-adique. Dans la proposition 1.4, nous avons noté $G(\mathcal{S})$ le groupe des homomorphismes continus de l'algèbre affine de G dans $\mathcal{S}$, i.e. le groupe des points de G , considéré comme groupe formel, à valeurs dans $\mathcal{S}$. Ce groupe ne doit pas être confondu avec le groupe des points de G , considéré comme limite inductive de groupes finis, à valeurs dans $\mathcal{S}$, autrement dit avec le groupe $\varinjlim G_n(\mathcal{S})$. Il est clair que ce dernier s'identifie au sous-groupe de torsion $G_{tor}(\mathcal{S})$ de $G(\mathcal{S})$.

Avec des notations évidentes, si $(L,M) = LM_A(G)$, le groupe $G(\mathcal{S})$ s'identifie canoniquement (en supposant G unipotent si $p = 2$) au groupe $N_L(\mathcal{S}) \times_{N_L^0(\mathcal{S})} G_M(\mathcal{S})$ (cf. prop. 1.4). Comme $N_L(\mathcal{S})$ est sans torsion et comme $G_M(\mathcal{S})$ est un groupe de torsion, on voit que $G_{tor}(\mathcal{S})$ s'identifie au sous-groupe de $G_M(\mathcal{S})$ formé des $u : M \to CW_k(S_k)$ tels que $(w_{\mathcal{S}} \circ u)(L) = 0$. On obtient une description analogue, dans le cas $p = 2$ et G connexe, en utilisant la proposition 1.4'.

Remarque 3 : soit G un groupe p-divisible sur A ; si $p = 2$, supposons G unipotent. On vient de voir que, si $\mathcal{S}$ est un A-anneau qui est un A-module libre de rang fini, le groupe $G_{tor}(\mathcal{S})$ s'identifie à un sous-groupe de $G_M(\mathcal{S}) = \mathrm{Hom}_{D_k}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$. On voit que la flèche $G_{tor}(\mathcal{S}) \to G_M(\mathcal{S})$ n'est autre que la composée de l'homomorphisme canonique de $G_{tor}(\mathcal{S}) \subset G(\mathcal{S})$ dans $G(\mathcal{S}/p\mathcal{S}) = G(\mathcal{S}_k) = G_k(\mathcal{S}_k)$ par l'isomorphisme canonique de $G_k(\mathcal{S}_k)$ sur $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$. On en déduit donc que l'homomorphisme canonique de $G_{tor}(\mathcal{S})$ dans $G_k(\mathcal{S}_k)$ est injectif. Ce résultat avait été annoncé dans [21] (th. 3) et peut d'ailleurs se démontrer directement.

§ 2.- <u>Le foncteur</u> $M \to M_{A'}$.

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on note K' une extension finie totalement ramifiée de K et e son degré. On note A' l'anneau des entiers de K' , $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A' et on désigne par π une uniformisante de A' .

On note $\nu(e)$ l'entier $\min_{n\in\mathbb{N}} \{p^n - ne\}$ et s(e) le plus petit entier s tel que $\nu(e) = p^s - se$. On écrit ν et s au lieu de $\nu(e)$ et s(e) lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Remarquons que, si $e \leq p-1$, on a $\nu(e) = 1$ et $s(e) = 0$.

2.1. Pour tout D_k-module M, et pour tout entier j, nous notons $M^{(j)}$ le D_k-module déduit de M par l'extension des scalaires σ^j (rappelons que σ désigne le Frobenius absolu sur k et A ; on le prolonge en un automorphisme de D_k en posant $\sigma(\underline{F}) = \underline{F}$ et $\sigma(\underline{V}) = \underline{V}$). Dans la suite, nous identifions le $\mathbb{Z}_p[\underline{F},\underline{V}]$-module sous-jacent à $M^{(j)}$ au $\mathbb{Z}_p[\underline{F},\underline{V}]$-module sous-jacent à M ; l'action d'un $\lambda \in A$ sur $M^{(j)}$ est alors la flèche $\underline{a} \mapsto \sigma^{-j}(\lambda)\underline{a}$.

Pour tout D_k-module M et pour tout entier j, on note v (resp. f) l'application D_k-linéaire de $M^{(j)}$ dans $M^{(j+1)}$ (resp. dans $M^{(j-1)}$) qui à $\underline{a} \in M^{(j)}$ (identifié à M) associe $\underline{Va}$ (resp. $\underline{Fa}$).

Il est clair que, si M est un D_k-module topologique, $M^{(j)}$ est, de manière naturelle, un D_k-module topologique et que les applications v et f sont continues.

Considérons le cas particulier où l'on se donne un k-anneau linéairement topologisé, séparé et complet, R et où $M = CW_k(R)$. On pose alors $CW_k^{(j)}(R) = M^{(j)}$. Il est commode de considérer les éléments de $CW_k^{(j)}(R)$ comme des covecteurs $(\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-j-1},a_{-j})$ dont les composantes (qui sont des éléments de R vérifiant les conditions habituelles) sont indexées par les entiers $\leq -j$: avec ces conventions, les formules donnant l'addition et la multiplication par un scalaire sont les mêmes que celles qui nous ont servies à définir le D_k-module $CW_k(R)$. L'application $v : CW_k^{(j)}(R) \to CW_k^{(j+1)}(R)$ (resp. $f : CW_k^{(j)}(R) \to CW_k^{(j-1)}(R)$) associe à $(\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-j-1},a_{-j})$ l'élément $(\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-j-1})$ (resp. $(\ldots,a_{-n}^p,\ldots,a_{-j-1}^p,a_{-j}^p)$).

On voit que v est surjective et que f est injective si et seulement si R est réduit.

2.2. Nous allons associer à tout D_k-module M un A'-module $M_{A'}$:

- pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, notons $M_i^{(j)}$ le A'-module $\mathfrak{m}^i \otimes_A M^{(j)}$;
- pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, notons $\varphi_{i,j} : M_i^{(j)} \to M_{i-1}^{(j)}$ l'application A'-linéaire déduite, par extension des scalaires, de l'inclusion $\mathfrak{m}^i \to \mathfrak{m}^{i-1}$;

- pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, notons $f_{i,j} : M_i^{(j)} \to M_i^{(j-1)}$ l'application A'-linéaire, déduite, par extension des scalaires, de l'application $f : M^{(j)} \to M^{(j-1)}$;
- enfin, pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, notons $v_{i,j} : M_i^{(j)} \to M_{i-e}^{(j+1)}$ l'application A'-linéaire qui, à $\lambda \otimes \underline{a} \in \mathfrak{m}^i \otimes_A M^{(j)}$, associe $p^{-1}\lambda \otimes v(\underline{a})$.

Pour tout sous-ensemble I de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, nous notons $\mathcal{D}_I(M)$ le diagramme (dans la catégorie des A'-modules) dont les objets sont les $M_i^{(j)}$ avec $(i,j) \in I$ et les flèches les $\varphi_{i,j}$, $f_{i,j}$ et $v_{i,j}$ dont la source et le but sont des objets de $\mathcal{D}_I(M)$. Il est clair que ce diagramme est commutatif.

Soit I_e l'ensemble des $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifiant $j \geq 0$ et

$$\begin{cases} i \geq 0 & \text{si } j = 0, \\ i \geq p^{j-1} - je & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

On pose alors $M_{A'} = \varinjlim \mathcal{D}_{I_e}(M)$.

Lorsque M est un D_k-module topologique, les $M_i^{(j)}$ ont une structure naturelle de A'-modules topologiques et les applications $\varphi_{i,j}$, $f_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont continues. On peut donc considérer $M_{A'}$ comme un A'-module topologique.

On vérifie facilement que, si I'_e est l'ensemble des $(i,j) \in I_e$ tels que $i \leq 1$, on a encore $M_{A'} = \varinjlim \mathcal{D}_{I'_e}(M)$. Comme I'_e est un ensemble fini, on voit que, si M est un D_k-module A-pro-artinien (resp. A-profini), $M_{A'}$ est un A'-module pro-artinien (resp. profini).

Il est clair que la correspondance $M \mapsto M_{A'}$ est fonctorielle : si M et N sont des D_k-modules (topologiques) et si $u : M \to N$ est une application D_k-linéaire (continue), nous notons $u_{A'} : M_{A'} \to N_{A'}$ l'application A'-linéaire (continue) induite par u.

<u>Remarques</u> : soit M un D_k-module.

1.- Posons $M_0 = A' \otimes_A M = M_0^{(0)}$ et, pour $1 \leq j \leq s+1$, $M_j = p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A M^{(j)} = M^{(j)}_{p^{j-1}-je}$. On voit que, étant donné un objet quelconque du diagramme $\mathcal{D}_{I_e}(M)$, il existe un chemin partant de cet objet et allant vers l'un des M_j. On en déduit que l'application canonique de $\bigoplus_{j=0}^{s+1} M_j$ dans $M_{A'}$ est surjective.

2.- Posons en outre, pour $0 \leq j \leq s$, $M'_j = p^{-j}\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A M^{(j)} = M^{(j)}_{p^j-je}$ et

$M''_{j+1} = p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A M^{(j+1)} = M^{(j+1)}_{p^{j-1}-je}$ (avec la convention que $\mathfrak{m}^{p^{-1}} = A'$). En "éliminant toutes les flèches inutiles", on voit facilement que $M_{A'}$ s'identifie à la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& M'_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "v_0"] & & & & M'_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "v_j"] & & & & M'_s \arrow[dl, "\varphi_s"'] \arrow[dr, "v_s"] & \\
M_0 & & M_1 & \cdots & M_j & & M_{j+1} & \cdots & M_s & & M_{s+1} \\
& M''_1 \arrow[ul] \arrow[ur, "\varphi'_0"'] & & & & M''_{j+1} \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi'_j"'] & & & & M''_{s+1} \arrow[ul, "f_s"] \arrow[ur, "\varphi'_s"'] &
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont évidentes.

En particulier, si $2 \le e \le p-1$, $M_{A'}$ est la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& M'_0 \arrow[dl, "\varphi_0"'] \arrow[dr, "v_0"] & \\
M_0 & & M_1 \\
& M''_1 \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "\varphi'_0"'] &
\end{tikzcd} .$$

2.3. Pour tout D_k-module M , regardons comment le A'-module $M_{A'}$ est relié au K'-espace vectoriel $M_{K'} = K'\otimes_A M = K'\otimes_{A'}(A'\otimes_A M)$:

PROPOSITION 2.1.- *Soit* M *un* D_k-*module. Posons* $M_{K'} = K'\otimes_A M = K'\otimes_{A'}(A'\otimes_A M)$. *La flèche canonique de* $A'\otimes_A M = M_0^{(0)}$ *dans* $M_{A'}$ *induit, par extension des scalaires, un isomorphisme de* $M_{K'}$ *sur* $K'\otimes_{A'} M_{A'}$.

Démonstration : pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'inclusion de $\mathfrak{m}^i$ dans K' et l'application $f^j : M^{(j)} \to M$ induisent, par passage au produit tensoriel, une application A'-linéaire de $M_i^{(j)} = \mathfrak{m}^i\otimes_A M^{(j)}$ dans $M_{K'}$; d'où, par extension des scalaires, une application K'-linéaire $\rho_{i,j} : K'\otimes_{A'} M_i^{(j)}$ dans $M_{K'}$. En utilisant le fait que le noyau de f^j est contenu dans le noyau de la multiplication par p^j et le fait que l'image de f^j contient p^jM , on voit que chaque $\rho_{i,j}$ est un isomorphisme. On voit que les $\rho_{i,j}$ sont compatibles avec les flèches du diagramme $\mathscr{D}_{I_e}(M)$. On peut donc passer à la limite inductive et on obtient encore un isomorphisme.

Remarque : soit M un D_k-module qui est un A-module libre de rang fini h .

Alors $M_{K'}$ est un espace vectoriel de dimension h sur K' et il résulte de la proposition précédente que $M_{A'}/(M_{A'})_{tor}$ s'identifie à un réseau (i.e. un sous-A'-module libre de rang h) de $M_{K'}$; il est clair que l'application $f^j : M^{(j)} \to M$ est injective et que son image est le sous-D_k-module $\underline{F}^jM$ de M . Si l'on utilise la platitude pour identifier les $\mathfrak{m}^i\otimes_A \underline{F}^jM$ à des réseaux de $M_{K'}$, on voit que l'image de $M_{A'}$ dans $M_{K'}$ est

$$(A'\otimes_A M) + \sum_{j=1}^{\infty} p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \underline{F}^jM = (A'\otimes_A M) + \sum_{j=1}^{s+1} p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \underline{F}^jM .$$

Si $e \le p-1$, on montre facilement que $M_{A'}$ n'a pas de torsion et s'identifie donc au réseau $A'\otimes_A M + p^{-1}\mathfrak{m}\otimes_A \underline{F}M$. Si $e > p-1$, en revanche, $(M_{A'})_{tor}$ est un A'-module de longueur finie, non nul en général.

2.4. Pour tout entier j vérifiant $0 \le j \le s+1$, soit $I'_{e,j}$ l'ensemble des $(i,j') \in I'_e$ tels que $j' \ge j$. Pour tout D_k-module M , on note $M_{A'}[j]$ la limite inductive du diagramme $\mathscr{D}_{I'_{e,j}}(M)$. On a donc $M_{A'}[0] = M_{A'}$ et on voit que $M_{A'}[s+1]$ s'identifie à $M_{s+1} = p^{-s-1}\mathfrak{m}^{p^s}\otimes_A M^{(s+1)}$.

PROPOSITION 2.2.- *Soit* M *un* D_k-*module sans* $\underline{F}$-*torsion. Pour tout entier* j *vérifiant* $0 \le j \le s$, *l'application canonique de* $M_{A'}[j+1]$ *dans* $M_{A'}$ *est injective*.

Démonstration : il est clair qu'il suffit de montrer que, pour tout j , l'application canonique de $M_{A'}[j+1]$ dans $M_{A'}[j]$ est injective. En utilisant les notations des remarques 1 et 2 du n° 2.2, on voit que $M_{A'}[j]$ est la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& M'_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "v_j"] & & \\
M_j & & M_{j+1} \arrow[r, "\text{can.}"] & M_{A'}[j+1] \\
& M''_{j+1} \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi'_j"'] & &
\end{tikzcd} .$$

On voit qu'il suffit de montrer que l'application canonique de M_{j+1} dans la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& M'_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "v_j"] & \\
M_j & & M_{j+1} \\
& M''_{j+1} \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

est injective.

Soit $N = p^{-j-1}\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A M^{(j)}$; soit $\tilde{\varphi}$ l'application de M_j dans N déduite par extension des scalaires de l'inclusion de $p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}}$ dans $p^{-j-1}\mathfrak{m}^{p^j}$ et soit $\tilde{f}$ l'application de M_{j+1} dans N déduite par extension des scalaires de $f : M^{(j+1)} \to M^{(j)}$. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & M'_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "v_j"] & \\
M_j \arrow[ddr, bend right, "\tilde{\varphi}"'] & & M_{j+1} \arrow[ddl, bend left, "\tilde{f}"] \\
 & M''_{j+1} \arrow[ul, "\varphi_j"] \arrow[ur, "\varphi'_j"'] & \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme M est sans $\underline{F}$-torsion, l'application f est injective. Comme $p^{-j-1}\mathfrak{m}^{p^j}$ est un A-module plat, l'application $\tilde{f}$ est encore injective et l'assertion en résulte facilement.

2.5. Conservons les notations qui précèdent. La proposition précédente permet, lorsque M est un D_k-module sans $\underline{F}$-torsion, d'identifier les $M_{A'}[j]$ à des sous-A'-modules de $M_{A'}$; on obtient ainsi une suite décroissante

$$M_{A'} = M_{A'}[0] \supset \ldots \supset M_{A'}[j] \supset M_{A'}[j+1] \supset \ldots \supset M_{A'}[s+1] = M_{s+1} .$$

PROPOSITION 2.3.- <u>Soit</u> M <u>un</u> D_k<u>-module sans</u> $\underline{F}$<u>-torsion. Pour</u> $0 \leq j \leq s$, <u>le</u> A'<u>-module</u> $M_{A'}[j]/M_{A'}[j+1]$ <u>est isomorphe, canoniquement et fonctoriellement en</u> M , <u>à</u> $(\mathfrak{m}^{p^{j-1}}/\mathfrak{m}^{p^j}) \otimes_A (M/\underline{F}M)^{(j)}$ <u>(en convenant que</u> $\mathfrak{m}^{p^{-1}} = A'$).

<u>Démonstration</u> : Comme $M_{A'}[j]$ est la limite inductive du diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & M'_j \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "v_j"] & & \\
M_j & & M_{j+1} \arrow[r, "\text{can.}"] & M_{A'}[j+1] , \\
 & M''_{j+1} \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "\varphi'_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

on voit que la composée de l'application canonique de M_j dans $M_{A'}[j]$ avec la projection de $M_{A'}[j]$ sur $M_{A'}[j]/M_{A'}[j+1]$ est surjective et que son noyau est $\operatorname{Im}\varphi_j + \operatorname{Im} f_j$. D'où un isomorphisme canonique de $M_j/(\operatorname{Im}\varphi_j + \operatorname{Im} f_j)$ sur $M_{A'}[j]/M_{A'}[j+1]$. Or la multiplication par p^{-j} définit un isomorphisme canonique de $\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A M^{(j)}$ sur $M_j = p^{-j}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A M^{(j)}$. On voit que l'image réciproque, par cet isomorphisme, de $\operatorname{Im}\varphi_j$ (resp. $\operatorname{Im} f_j$) est, avec des notations évidentes, $\operatorname{Im}\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A M^{(j)}$ (resp. $\operatorname{Im}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \underline{F}M^{(j)}$) . Il est clair que le noyau de la projection de $\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A M^{(j)}$ sur $(\mathfrak{m}^{p^{j-1}}/\mathfrak{m}^{p^j}) \otimes_A (M^{(j)}/\underline{F}M^{(j)})$ est $\operatorname{Im}\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A M^{(j)} + \operatorname{Im}\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \underline{F}M^{(j)}$ et que $M^{(j)}/\underline{F}M^{(j)}$ est canoniquement isomorphe à $(M/\underline{F}M)^{(j)}$. On en déduit un isomorphisme canonique η_j de $(\mathfrak{m}^{p^{j-1}}/\mathfrak{m}^{p^j}) \otimes_A (M/\underline{F}M)^{(j)}$ sur $M_{A'}[j]/M_{A'}[j+1]$.

Enfin, il est clair que cette construction est fonctorielle en M .

COROLLAIRE 1.- <u>Soit</u> M <u>un</u> D_k<u>-module sans</u> $\underline{F}$<u>-torsion. Le A'-module</u> $M_{A'}/M_{A'}[1]$ <u>est tué par</u> $\mathfrak{m}$ <u>et l'application qui à</u> $a \in M$ <u>associe l'image de</u> $1 \otimes a \in A' \otimes_A M$ <u>dans</u> $M_{A'}$ <u>induit, par passage aux quotients, un isomorphisme (de k-espaces vectoriels) de</u> $M/\underline{F}M$ <u>sur</u> $M_{A'}/M_{A'}[1]$.

<u>Démonstration</u> : c'est clair, cet isomorphisme n'est autre que l'application η_0 définie ci-dessus.

COROLLAIRE 2.- <u>Soit</u> M <u>un</u> D_k<u>-module sans</u> $\underline{F}$<u>-torsion et soit</u> L <u>un sous-</u>D_k<u>-module de</u> M <u>vérifiant</u> $\underline{F}M \cap L = \underline{F}L$. <u>L'application de</u> $L_{A'}$ <u>dans</u> $M_{A'}$ <u>déduite par fonctorialité de l'inclusion de</u> L <u>dans</u> M , <u>est injective</u>.

<u>Démonstration</u> : avec des notations évidentes, on voit que $\underline{F}M \cap L = \underline{F}L$ implique que l'application canonique de $L/\underline{F}L$ dans $M/\underline{F}M$ est injective ; on voit qu'il en est de même, pour $0 \leq j \leq s$, de $(L/\underline{F}L)^{(j)} \to (M/\underline{F}M)^{(j)}$ et de $(\mathfrak{m}^{p^{j-1}}/\mathfrak{m}^{p^j}) \otimes_A (L/\underline{F}L)^{(j)} \to (\mathfrak{m}^{p^{j-1}}/\mathfrak{m}^{p^j}) \otimes_A (M/\underline{F}M)^{(j)}$. D'après la proposition 2.3, l'application canonique de $L_{A'}[j]/L_{A'}[j+1]$ dans $M_{A'}[j]/M_{A'}[j+1]$ est donc injective. Enfin il est clair que l'application canonique de $L_{A'}[s+1] = L_{s+1}$ dans $M_{A'}[s+1] = M_{s+1}$ est injective et l'assertion en résulte.

2.6. Donnons maintenant d'autres propriétés d'exactitude du foncteur $M \mapsto M_{A'}$.

PROPOSITION 2.4.- <u>Le foncteur</u> $M \mapsto M_{A'}$ <u>est exact à droite</u>.

<u>Démonstration</u> : soit

$$L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

une suite exacte de D_k-modules. Comme le produit tensoriel est exact à droite, on voit que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la suite

$$L_i^{(j)} \longrightarrow M_i^{(j)} \longrightarrow N_i^{(j)} \longrightarrow 0$$

est exacte. L'exactitude de la suite

$$L_{A'} \longrightarrow M_{A'} \longrightarrow N_{A'} \longrightarrow 0$$

s'en déduit par passage à la limite inductive.

COROLLAIRE 1.- Soit

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{u'} N \longrightarrow 0$$

une suite exacte de D_k-modules sans $\underline{F}$-torsion. La suite

$$0 \longrightarrow L_{A'} \xrightarrow{u_{A'}} M_{A'} \xrightarrow{u'_{A'}} N_{A'} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration : compte-tenu de la proposition 2.4, il suffit de montrer que $u_{A'}$ est injective. Si l'on utilise u pour identifier L à un sous-D_k-module de M, on voit que le fait que N soit sans $\underline{F}$-torsion équivaut à $\underline{F}M \cap L = \underline{F}L$; il suffit alors d'appliquer le corollaire 2 à la proposition 2.3.

COROLLAIRE 2.- Soit

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{u'} N$$

une suite exacte de D_k-modules sans $\underline{F}$-torsion. Supposons que $\underline{F}N \cap v(M) = v(\underline{F}M)$. Alors la suite

$$0 \longrightarrow L_{A'} \xrightarrow{u_{A'}} M_{A'} \xrightarrow{u'_{A'}} N_{A'}$$

est exacte.

Démonstration : soit $\overline{M}$ le conoyau de u. Comme $\overline{M}$ s'identifie à un sous-D_k-module de N, $\overline{M}$ est sans $\underline{F}$-torsion et, d'après le corollaire 1, la suite

$$0 \longrightarrow L_{A'} \longrightarrow M_{A'} \longrightarrow \overline{M}_{A'} \longrightarrow 0$$

est exacte. Il suffit donc de montrer que l'application de $\overline{M}_{A'}$ dans $N_{A'}$ induite par l'inclusion de $\overline{M}$ dans N est injective. Mais $\underline{F}N \cap u'(M) = u'(\underline{F}M)$ signifie $\underline{F}N \cap \overline{M} = \underline{F}\overline{M}$ et il suffit d'appliquer le corollaire 2 à la proposition 2.3.

2.7. Donnons, pour terminer ce paragraphe, une description de $M_{A'}$ lorsque l'action de $\underline{V}$ sur le D_k-module M est surjective :

PROPOSITION 2.5.- Soit M un D_k-module tel que $\underline{V}M = M$. Alors l'application canonique de $A' \otimes_A M = M_0^{(0)}$ dans $M_{A'}$ est surjective et son noyau est le sous-A'-module $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M)$.

Remarques :

1.- Si $j \geq s+1$, on a $j-1 \geq s$ donc $p^j - je \leq p^{j-1} - (j-1)e$ et $p^j \geq p^{j-1} + e$; par conséquent,

$$\mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^{j+1}|_M) \subset \mathrm{Im}(p\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^{j+1}|_M) \subset \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A p.\mathrm{Ker}\, \underline{V}^{j+1}|_M)$$

$$\subset \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^{j}|_M).$$

On en déduit que $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M) = \sum_{j=1}^{s+1} \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M)$. En particulier, si M est A-pro-artinien, ce sous-A'-module est bien fermé dans $A' \otimes_A M$.

2.- Si M est un D_k-module tel que $\underline{V}M = M$ et tel que l'action de $\underline{F}$ est injective, on a alors $\mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M = \mathrm{Ker}\, p^j|_M$ et $M_{A'}$ s'identifie donc au quotient de $A' \otimes_A M$ par $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, p^j|_M)$.

Démonstration de la proposition : posons $N' = \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{Im}(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M)$ et $N = (A' \otimes_A M)/N'$. Pour tout $(i,j) \in I_e$, nous allons définir une application A'-linéaire $\theta_{i,j} : M_i^{(j)} \to N$:

- si $j = 0$, alors $i \geq 0$, et l'application $\theta_{i,0}$ est la composée de l'application canonique de $\mathfrak{m}^i \otimes_A M$ dans $A' \otimes_A M$ et de la projection de $A' \otimes_A M$ sur N ;
- si $j \geq 1$, alors $i \geq p^{j-1} - je$, et tout élément de $M_i^{(j)}$ est somme finie d'éléments de la forme $p^{-j}\lambda \otimes_A \underline{a}$, avec $\lambda \in \mathfrak{m}^{i+je} \subset \mathfrak{m}^{p^{j-1}}$ et $\underline{a} \in M^{(j)}$; comme $\underline{V}M = M$, on a $\underline{V}^j M^{(j)} = M^{(j)}$, ou encore l'application $v^j : M \to M^{(j)}$ est surjective ; il existe donc $\underline{b} \in M$ tel que $v^j \underline{b} = \underline{a}$; si $\underline{b}'$ est un autre élément de M tel que $v^j \underline{b}' = \underline{a}$, on a $\underline{b}' = \underline{b} + \underline{c}$, avec $\underline{c} \in \mathrm{Ker}\, v^j|_M$; on en déduit que l'élément $\lambda \otimes \underline{b} - \lambda \otimes \underline{b}'$ de $A' \otimes_A M$ appartient à $\mathfrak{m}^{p^{j-1}} \otimes_A \mathrm{Ker}\, \underline{V}^j|_M$, donc au noyau de la projection canonique de $A' \otimes_A M$ sur N. Il est alors clair qu'il existe une application A'-linéaire $\theta_{i,j} : M_i^{(j)} \to N$ et une seule telle que $\theta_{i,j}(p^{-j}\lambda \otimes \underline{a})$ soit l'image de $\lambda \otimes_A \underline{b}$ ($\in A' \otimes_A M$) dans N.

On voit tout de suite que les $\theta_{i,j}$ sont compatibles avec les flèches du diagramme $\mathcal{D}_{I_e}(M)$; on en déduit donc une application

$$\theta : \varinjlim \mathcal{D}_{I_e}(M) = M_{A'} \to N .$$

Comme le composé de la flèche canonique θ' de $A'\otimes_A M$ dans $M_{A'}$ avec θ n'est autre que la projection canonique de $A'\otimes_A M$ sur N, on voit que le noyau de θ' est contenu dans N'.

Pour montrer que le noyau de θ' contient N', il suffit de vérifier que si $j \geq 1$, $\lambda \in m^{p^{j-1}}$ et $\underline{a} \in \operatorname{Ker} \underline{V}^j|_M$, alors l'élément $\lambda \otimes \underline{a}$ de $A'\otimes_A M$ appartient au noyau de θ'. Mais cet élément provient, par une flèche du diagramme $\mathcal{D}_{I_e}(M)$, de l'élément $\lambda\otimes\underline{a}$ de $m^{p^{j-1}}\otimes_A M = M^{(0)}_{p^{j-1}}$. Ce dernier s'envoie, par une flèche de $\mathcal{D}_{I_e}(M)$, sur l'élément $p^{-j}\lambda\otimes v^j(\underline{a})$ de $p^{-j}m^{p^{j-1}}\otimes_A M^{(j)} = M^{(j)}_{p^{j-1}-je}$. Comme $\underline{a} \in \operatorname{Ker}\underline{V}^j|_M$, on a $v^j(\underline{a}) = \underline{V}^j\underline{a} = 0$, d'où $N' \subset \operatorname{Ker}\theta'$.

Enfin le fait que $\underline{V}M = M$ implique que toutes les applications $v_{i,j}$ du diagramme $\mathcal{D}_{I'_e}(M)$ sont toutes surjectives et la surjectivité de θ' en résulte très facilement.

§3.- Relèvement des covecteurs (suite).

On conserve les hypothèses et les notations du paragraphe précédent. Pour tout k-anneau R linéairement topologisé, séparé et complet, on note $CW_{k,A'}(R)$ le A'-module topologique $(CW_k(R))_{A'}$.

3.1. Rappelons (cf. n° II.5.1) que l'on a appelé anneau p-adique tout anneau $\mathbb{S}$ linéairement topologisé, séparé et complet, dont la topologie est la topologie p-adique, tel que p n'est pas diviseur de 0. On appelle A'-anneau p-adique tout A'-anneau topologique qui est un anneau p-adique. Il est clair que l'inclusion de A dans A' permet de considérer tout A'-anneau p-adique comme un A-anneau p-adique.

Pour tout A'-anneau p-adique $\mathbb{S}$, on pose $\mathbb{S}_k = \mathbb{S}\otimes_{A'} k = \mathbb{S}/m\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}_K = \mathbb{S}\otimes_{A'} K' = \mathbb{S}\otimes_A K$; on identifie $\mathbb{S}$ à un sous-anneau de $\mathbb{S}_K$ de manière évidente. On note $P'(\mathbb{S})$ le sous-A'-module de $\mathbb{S}_K$ engendré par les éléments

de la forme $p^{-n}\hat{a}^{p^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\hat{a} \in m\mathbb{S}$; pour n suffisamment grand, on a $p^{-n}\hat{a}^{p^n} \in \mathbb{S}$, pour tout $\hat{a} \in m\mathbb{S}$; on en déduit que $P'(\mathbb{S})$ est un sous-A'-module fermé de $\mathbb{S}_K$ vérifiant $m\mathbb{S} \subset P'(\mathbb{S}) \subset m^{\nu}\mathbb{S}$ (rappelons que $\nu = \min_{n\in\mathbb{N}}\{p^n - ne\}$; en particulier, $P'(\mathbb{S}) = m\mathbb{S}$ si $e \leq p-1$).

Soit $\mathbb{S}$ un A'-anneau p-adique. On a défini au n° II.5.1 une application A-linéaire continue $\hat{w}_{\mathbb{S}} : CW_A(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}_K$. Si $\underline{\hat{a}} = (\dots,\hat{a}_{-n},\dots,\hat{a}_{-1},\hat{a}_0) \in CW_A(\mathbb{S})$, alors $\hat{w}_{\mathbb{S}}(\underline{\hat{a}}) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n}\hat{a}_{-n}^{p^n}$. On voit que l'homomorphisme canonique de $CW_A(\mathbb{S})$ dans $CW_A(\mathbb{S}/m\mathbb{S}) = CW_k(\mathbb{S}_k)$ est surjectif et que son noyau est le sous-A-module fermé $CW_A(m\mathbb{S})$ de $CW_A(\mathbb{S})$ formé des éléments dont toutes les composantes sont dans $m\mathbb{S}$; l'image de $CW_A(m\mathbb{S})$ par $\hat{w}_{\mathbb{S}}$ est contenue dans $P'(\mathbb{S})$ et, par passage aux quotients, on en déduit une application A-linéaire continue de $CW_k(\mathbb{S}_k)$ dans $\mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$; d'où, par extension des scalaires, une application A'-linéaire continue

$$w'_{\mathbb{S}} : A'\otimes_A CW_k(\mathbb{S}_k) \to \mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S}) .$$

LEMME 3.1.- Soit $M = CW_k(\mathbb{S}_k)$. Le noyau de $w'_{\mathbb{S}}$ contient le sous-A'-module $M' = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Im}(m^{p^j}\otimes_A \operatorname{Ker}\underline{V}^{j+1}|_M)$ de $A'\otimes_A M$.

Démonstration : il suffit de montrer que, si j est un entier ≥ 0, si $\lambda \in m^{p^j}$ et si $\underline{b} \in \operatorname{Ker}\underline{V}^{j+1}|_M$, on a $w'_{\mathbb{S}}(\lambda\otimes\underline{b}) = 0$. On voit que $\underline{b}$ s'écrit sous la forme $(\dots,0,\dots,0,b_{-j},\dots,b_{-1},b_0)$; si $\hat{b}_{-n}$ est un relèvement de b_{-n} dans $\mathbb{S}$, on voit que $w'_{\mathbb{S}}(\lambda\otimes\underline{b})$ est l'image, dans $\mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$ de $\beta = \sum_{n=0}^{j} p^{-n}\lambda\hat{b}_{-n}^{p^n}$. Soit π une uniformisante de A' ; on peut écrire $\lambda = \mu\pi^{p^j}$, avec $\mu \in A'$. On a alors $\beta = \mu\sum_{n=0}^{j} p^{-n}(\pi^{p^{j-n}}\hat{b}_{-n})^{p^n} \in P'(\mathbb{S})$, d'où $w'_{\mathbb{S}}(\lambda\otimes\underline{b}) = 0$.

Le sous-A'-module M', qui est aussi $\sum_{j=0}^{s} \operatorname{Im}(m^{p^j}\otimes_A \operatorname{Ker}\underline{V}^{j+1}|_M)$, est fermé dans $A'\otimes_A M$ (cf. rem. 1 du n° 2.7) et l'application $w'_{\mathbb{S}}$ induit, par passage au quotient, une application A'-linéaire continue $w''_{\mathbb{S}} : (A'\otimes_A M)/M' \to \mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$.

Il est clair que le D_k-module $M = CW_k(\mathbb{S}_k)$ vérifie $\underline{V}M = M$. Il résulte donc de la proposition 2.5 que l'application canonique de $A'\otimes_A M$ dans $M_{A'}$ induit, par passage au quotient, un isomorphisme φ de $(A'\otimes_A M)/M'$ sur $M_{A'}$. On obtient alors une application A'-linéaire continue $w_{\mathbb{S}} = w''_{\mathbb{S}}\circ\varphi^{(-1)} : CW_{k,A'}(\mathbb{S}_k) \to \mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$.

Il est immédiat que l'application $w_{\mathfrak{S}}$ est une transformation naturelle au sens suivant : soit $\psi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ un morphisme de A'-anneaux p-adiques ; soit $\psi_k : \mathfrak{S}_k \to \mathfrak{S}'_k$ la flèche déduite de ψ par extension des scalaires et soit $CW_{k,A'}(\psi_k) : CW_{k,A'}(\mathfrak{S}_k) \to CW_{k,A'}(\mathfrak{S}'_k)$ la flèche déduite de $CW_k(\psi_k) : CW_k(\mathfrak{S}_k) \to CW_k(\mathfrak{S}'_k)$ par fonctorialité ; soit $\psi_K : \mathfrak{S}_K \to \mathfrak{S}'_K$ la flèche déduite de ψ par extension des scalaires et soit $\tilde{\psi}_K : \mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S}) \to \mathfrak{S}'_K/P'(\mathfrak{S}')$ la flèche déduite de ψ_K par passage aux quotients (il est clair que $\psi_K(P'(\mathfrak{S})) \subset P'(\mathfrak{S}')$) ; alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CW_{k,A'}(\mathfrak{S}_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{S}}} & \mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S}) \\ {\scriptstyle CW_{k,A'}(\psi_k)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\psi}_K} \\ CW_{k,A'}(\mathfrak{S}'_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{S}'}} & \mathfrak{S}'_K/P'(\mathfrak{S}') \end{array}$$

est commutatif.

3.2. Pour tout A'-anneau spécial (cf. n° II.5.4) $\mathfrak{R}$, on pose

$$\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R} \otimes_{A'} k = \mathfrak{R}/\mathfrak{m}\mathfrak{R} .$$

On identifie $\mathfrak{R}$ à un sous-anneau de $\mathfrak{R}_K = \mathfrak{R} \otimes_A K = \mathfrak{R} \otimes_{A'} K'$ et $\mathfrak{R}_K$ à un sous-anneau de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ (id.). On a défini $P(\mathfrak{R})$ comme étant le sous-A'-module fermé de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ formé des α tels que $d\alpha \in \Omega_{A'}(\mathfrak{R})$ (en identifiant $\Omega_{A'}(\mathfrak{R})$ à un sous-module de $\Omega_{K'}(\hat{\mathfrak{R}}_K^{an})$).

Soit $P'(\mathfrak{R})$ le sous-A'-module de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ engendré par les éléments de la forme $p^{-n}\beta^{p^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathfrak{m}\mathfrak{R}$; c'est un sous-A'-module fermé de $P(\mathfrak{R})$, contenu dans $\mathfrak{R}_K$ et vérifiant $\mathfrak{m}\mathfrak{R} \subset P'(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{R}$.

Soit $\mathfrak{R}$ un A'-anneau spécial. On a défini au n° II.5.6 une application A-linéaire continue $\hat{w}_{\mathfrak{R}} : CW_A(\mathfrak{R}) \to P(\mathfrak{R})$. Ici encore l'homomorphisme canonique de $CW_A(\mathfrak{R})$ dans $CW_A(\mathfrak{R}/\mathfrak{m}\mathfrak{R}) = CW_k(\mathfrak{R}_k)$ est surjectif et son noyau est le sous-A-module fermé $CW_A(\mathfrak{m}\mathfrak{R})$ de $CW_A(\mathfrak{R})$ formé des éléments dont toutes les composantes sont dans $\mathfrak{m}\mathfrak{R}$; il est clair que l'image par $\hat{w}_{\mathfrak{R}}$ de $CW_A(\mathfrak{m}\mathfrak{R})$ est contenue dans $P'(\mathfrak{R})$ et, par passage aux quotients, on en déduit une application A-linéaire continue de $CW_k(\mathfrak{R}_k)$ dans $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$; d'où, par extension des scalaires, une application A'-linéaire continue

$$w'_{\mathfrak{R}} : A' \otimes_A CW_k(\mathfrak{R}_k) \longrightarrow P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}) .$$

Si $M = CW_k(\mathfrak{R}_k)$, on voit, comme dans le cas des A'-anneaux p-adiques, que le noyau de $w'_{\mathfrak{R}}$ contient le sous-A'-module fermé

$$M' = \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Im}(\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A \operatorname{Ker} \underline{V}^{j+1}|_M) \quad \text{de} \quad A' \otimes_A M \ ;$$

d'où, par passage au quotient, une application A'-linéaire continue $w''_{\mathfrak{R}}$ de $(A' \otimes_A M)/M'$ dans $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$.

Comme $\underline{V}M = M$, la proposition 2.5 implique que l'application canonique de $A' \otimes_A M$ dans $M_{A'}$ induit, par passage au quotient, un isomorphisme φ de $(A' \otimes_A M)/M'$ sur $M_{A'}$. D'où une application A'-linéaire continue

$$w_{\mathfrak{R}} = w''_{\mathfrak{R}} \circ \varphi^{(-1)} : CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) \longrightarrow P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}) .$$

PROPOSITION 3.2.- <u>Soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>un A'-anneau spécial. L'application A'-linéaire continue</u> $w_{\mathfrak{R}} : CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) \to P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ <u>est un isomorphisme</u>.

<u>Démonstration</u> : choisissons un A-anneau spécial $\mathfrak{R}_0$ contenu dans $\mathfrak{R}$ qui relève $\mathfrak{R}_k$ (il est clair qu'un tel anneau existe toujours : on se ramène au cas où $\mathfrak{R}$ est local ; si l'on choisit des coordonnées, $\mathfrak{R}$ s'identifie alors à un anneau des séries formelles $A''[[X_1, X_2, \dots, X_d]]$ à coefficients dans l'anneau A'' des entiers d'une extension finie non ramifiée du corps des fractions de A' ; si k'' est le corps résiduel de A'' , on peut prendre $\mathfrak{R}_0 = W(k'')[[X_1, X_2, \dots, X_d]]$). On voit que $A' \otimes_A \mathfrak{R}_0$ s'identifie à $\mathfrak{R}$ et $A' \otimes_A P(\mathfrak{R}_0)$ à $P(\mathfrak{R})$).

Posons $N = P(\mathfrak{R}_0)/p\mathfrak{R}_0$. L'isomorphisme

$$w_{\mathfrak{R}_0} : CW_k(\mathfrak{R}_k) = M \longrightarrow P(\mathfrak{R}_0)/p\mathfrak{R}_0 = N$$

défini au n° II.5.7 permet de munir, par transport de structure, N d'une structure de D_k-module topologique et $w_{\mathfrak{R}_0}$ induit un isomorphisme

$$w_{\mathfrak{R}_0, A'} : M_{A'} \longrightarrow N_{A'} .$$

Le D_k-module N , comme M , vérifie $\underline{V}N = N$ et $N_{A'}$ s'identifie (prop. 2.5) au quotient de $A' \otimes_A N$ par le sous-A'-module $\sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{Im}(\mathfrak{m}^{p^j} \otimes_A \operatorname{Ker} \underline{V}^{j+1}|_N)$. On voit que $N_{A'}$ s'identifie aussi au quotient de $P(\mathfrak{R}) = A' \otimes_A P(\mathfrak{R}_0)$ par le sous-A'-module N' de $P(\mathfrak{R})$ engendré par $\operatorname{Im}(A' \otimes_A p\mathfrak{R}_0) = p\mathfrak{R}$ et les éléments de la forme $\pi^{p^j} . \sum_{n=0}^{j} p^{-n} \hat{b}_{-n}^{p^n}$, pour $j \in \mathbb{N}$ et les $\hat{b}_{-n}$ dans $\mathfrak{R}_0$ (et où π est une uniformisante de A').

Il est immédiat que $N' \subset P'(\mathfrak{R})$ et que $w_{\mathfrak{R}}$ est le composé de l'isomorphisme $w_{\mathfrak{R}_0,A'} : M_{A'} \to N_{A'} = P(\mathfrak{R})/N'$ et de la projection canonique de $P(\mathfrak{R})/N'$ sur $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$. Tout revient donc à montrer que $P'(\mathfrak{R}) \subset N'$, ou encore à établir le lemme suivant :

LEMME 3.3.- Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $b \in \mathfrak{m}\mathfrak{R}$. Alors $p^{-n}b^{p^n} \in N'$.

Démonstration : Ecrivons b sous la forme $b = \sum_{i=1}^{e} \pi^i b_i$, avec les $b_i \in \mathfrak{R}_0$ (où π est une uniformisante de A'). On procède par récurrence sur n :

- c'est clair si $n = 0$, car $\pi b_i \in N'$, donc a fortiori $\pi^i b_i = \pi^{i-1}\pi b_i \in N'$;
- on vérifie facilement que

$$\Big(\sum_{i=1}^{e} \pi^i b_i\Big)^{p^n} = \sum_{r=0}^{n-1} p^{n-r}\varphi_r((\pi^i b_i)^{p^r}) + \sum_{i=1}^{e} \pi^{ip^n} b_i^{p^n} ,$$

où les φ_r sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$; on a donc

$$p^{-n}b^{p^n} = \sum_{r=0}^{n-1} p^{-r}\varphi_r((\pi^i b_i)^{p^r}) + \sum_{i=1}^{e} p^{-n}\pi^{ip^n} b_i^{p^n} ;$$

on déduit facilement de l'hypothèse de récurrence que la première somme est dans N' ; enfin, pour tout $i \geq 1$, $p^{-n}(\pi b_i)^{p^n} \in N'$ donc, a fortiori,

$$p^{-n}\pi^{ip^n} b_i^{p^n} = \pi^{(i-1)p^n} . p^{-n}(\pi b_i)^{p^n} .$$

3.3. L'isomorphisme $w_{\mathfrak{R}}$ que l'on vient de construire définit une transformation naturelle : si $\psi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ est un morphisme de A'-anneaux spéciaux, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{R}}} & P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}) \\ {\scriptstyle CW_{k,A'}(\psi_k)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\psi}_K} \\ CW_{k,A'}(\mathfrak{R}'_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{R}'}} & P(\mathfrak{R}')/P'(\mathfrak{R}') \end{array}$$

(où toutes les flèches sont évidentes) est commutatif.

De même, si $\mathfrak{R}$ est un A'-anneau spécial, si $\mathfrak{S}$ est un A'-anneau p-adique et si $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{S}$ est un homomorphisme continu de A'-anneaux, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{R}}} & P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}) \\ {\scriptstyle CW_{k,A'}(\varphi_k)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}_K} \\ CW_{k,A'}(\mathfrak{S}_k) & \xrightarrow{w_{\mathfrak{S}}} & \mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S}) \end{array}$$

(où toutes les flèches sont encore évidentes) est commutatif.

Remarque : soit $\mathfrak{S}$ un A'-anneau p-adique et soit $P(\mathfrak{S})$ le sous-A'-module de $\mathfrak{S}_K$ engendré par les $p^{-n}\hat{b}^{p^n}$, avec $n \in \mathbb{N}$, $\hat{b} \in \mathfrak{S}$. Il est clair que $P(\mathfrak{S})$ contient $P'(\mathfrak{S})$ et que l'image de $w_{\mathfrak{S}}$ est contenue dans $P(\mathfrak{S})/P'(\mathfrak{S})$. Dans toute la suite de ce chapitre, on peut remplacer $\mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S})$ par $P(\mathfrak{S})/P'(\mathfrak{S})$ sans changer ni les démonstrations, ni les résultats.

On sait que $P'(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{S}$; on pourrait de même remplacer $\mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S})$ par $\mathfrak{S}_K/\mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{S}$ et $w_{\mathfrak{S}}$ par son composé avec la projection canonique de $\mathfrak{S}_K/P'(\mathfrak{S})$ sur $\mathfrak{S}_K/\mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{S}$; en revanche si $\mathfrak{R}$ est un A'-anneau spécial, il sera essentiel de travailler avec $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ et non avec $P(R)/(\mathfrak{m}^{\vee}R) \cap P(R)$ (l'application composée de $w_{\mathfrak{R}}$ avec la projection canonique de $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ sur $P(\mathfrak{R})/(\mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{R}) \cap P(\mathfrak{R})$ n'est un isomorphisme que si $\mathfrak{m}^{\vee}\mathfrak{R} = P'(\mathfrak{R})$, ce qui se produit si et seulement si $e \leq p-1$).

§4.- Groupes formels lisses sur A' .

On conserve les hypothèses et les notations des deux paragraphes précédents.

4.1. Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A' et soit $\mathfrak{R}$ son algèbre affine. Soit $G_k = G \otimes_{A'} k$ sa fibre spéciale ; c'est un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur k dont l'algèbre affine s'identifie à $\mathfrak{R}_k = R \otimes_{A'} k$ et $\mathfrak{R}$ est un A'-anneau spécial.

Notons $\Delta : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R} \hat{\otimes}_{A'} \mathfrak{R}$ (resp. $\Delta_k : \mathfrak{R}_k \to \mathfrak{R}_k \hat{\otimes}_k \mathfrak{R}_k$) le coproduit relatif à G (resp. G_k) ; il est clair que Δ relève Δ_k . Nous notons encore Δ le prolongement de Δ à $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ et, pour tout $\alpha \in \hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$, nous posons $\partial\alpha = \alpha\hat{\otimes}1 - \Delta\alpha + 1\hat{\otimes}\alpha$.

Notons $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ le sous-A'-module de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ formé des $\alpha \in P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha \in P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$ et $MH_{A'}(G)$ le quotient de $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ par $P'(\mathfrak{R})$ (c'est donc un sous-A'-module de $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$).

Posons enfin $M_{A'}(G_k) = (\underline{M}(G_k))_{A'}$. Il est clair que $CW_k(\mathfrak{R}_k)$ est un D_k-module sans $\underline{F}$-torsion. On sait que $\underline{M}(G_k)$ s'identifie à un sous-D_k-module de $CW_k(\mathfrak{R}_k)$. En outre, si $\underline{a} = (\dots,a_{-n},\dots,a_0) \in \underline{M}(G_k) \cap \underline{F}CW_k(\mathfrak{R}_k)$, on voit que l'image de a_0 dans $t^*_G(k)$ est nulle et on en déduit (prop. 4.3 du chap. III) que $\underline{a} \in \underline{F}\,\underline{M}(G_k)$. On a donc $\underline{M}(G_k) \cap \underline{F}CW_k(\mathfrak{R}_k) = \underline{F}\,\underline{M}(G_k)$ et il résulte du corollaire 2 à la proposition 2.3 que l'application canonique de $M_{A'}(G_k)$ dans $CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k)$ est injective. Nous l'utilisons pour identifier $M_{A'}(G_k)$ à un sous-A'-module de $CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k)$. Comme $\underline{M}(G_k)$ est fermé dans $CW_k(\mathfrak{R}_k)$, $M_{A'}(G_k)$ est fermé dans $CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k)$.

PROPOSITION 4.1.- <u>Soit</u> G <u>un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur</u> A' <u>et soit</u> $\mathfrak{R}$ <u>son algèbre affine. Soit</u> $G_k = G\otimes_{A'}k$ <u>et</u> $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}\otimes_{A'}k$.

i) <u>Les A'-modules</u> $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G) = \{\alpha \in P(\mathfrak{R}) \mid \partial\alpha \in P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})\}$ <u>et</u> $MH_{A'}(G) = \mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)/P'(\mathfrak{R})$ <u>ne dépendent que de la réduction modulo</u> $\mathfrak{m}$ <u>du coproduit relatif à</u> G .

ii) <u>La restriction de</u> $w_{\mathfrak{R}} : CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) \to P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ <u>à</u> $M_{A'}(G_k)$ <u>induit un isomorphisme du A'-module topologique</u> $M_{A'}(G_k)$ <u>sur</u> $MH_{A'}(G)$.

<u>Démonstration</u> : il est clair que la première assertion résulte de la seconde. Montrons (ii).

Notons ∂^1 l'application D_k-linéaire continue de $CW_k(\mathfrak{R}_k)$ dans $CW_k(\mathfrak{R}_k\hat{\otimes}_k\mathfrak{R}_k)$ qui à $(\dots,a_{-n},\dots,a_0)$ associe

$$(\dots,a_{-n}\hat{\otimes}1,\dots,a_0\hat{\otimes}1) - (\dots,\Delta_k a_{-n},\dots,\Delta_k a_0) + (\dots,1\hat{\otimes}a_{-n},\dots,1\hat{\otimes}a_0)$$

et $\tilde{\partial}$ l'application de $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ dans $P(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_A\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$ déduite, par passage aux quotients, de l'application ∂ définie plus haut. Il est clair que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) & \xrightarrow{\partial^1_{A'}} & CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k\hat{\otimes}_k\mathfrak{R}_k) \\ {\scriptstyle w_{\mathfrak{R}}}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle w_{\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}}} \\ P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & P(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}) \end{array}$$

est commutatif. On en déduit que $w_{\mathfrak{R}}$ induit, par restriction, un isomorphisme

du noyau de $\partial^1_{A'}$ sur celui de $\tilde{\partial}$ qui n'est autre que $MH_{A'}(G_k)$.

Pour tout entier $n \geq 0$, soit $C^n = \widehat{CW}_k(\mathfrak{R}_k^{\hat{\otimes}n}) = CW_k(\mathfrak{R}_k^{\hat{\otimes}n})$. On a une suite exacte de D_k-modules sans $\underline{F}$-torsion

$$0 \longrightarrow \underline{M}(G_k) \longrightarrow C^1 \xrightarrow{\partial^1} C^2 .$$

Admettons que $\underline{F}C^2 \cap \partial^1C^1 = \partial^1(\underline{F}C^1)$; le corollaire 2 à la proposition 2.4 implique que la suite

$$0 \longrightarrow M_{A'}(G_k) \longrightarrow C^1_{A'} \xrightarrow{\partial^1_{A'}} C^2_{A'}$$

est exacte et $M_{A'}(G_k)$ est bien le noyau de $\partial^1_{A'}$.

Montrons donc que $\underline{F}C^2 \cap \partial^1C^1 = \partial^1(\underline{F}C^1)$. Pour cela, considérons le complexe de Hochschild de G_k à valeurs dans $\widehat{CW}_k$. On voit que le groupe des n-cochaînes s'identifie à C^n et que l'opérateur bord en degré 1 coïncide avec ∂^1 . Comme $\widehat{CW}_k$ est injectif (th. 2 du § 1 du chap. III), on a $H^2_s(G_k,\widehat{CW}_k) = \mathrm{Ext}^1(G_k,\widehat{CW}_k) = 0$. Soit alors $\underline{a} \in C^1$ tel que $\partial^1\underline{a} = \underline{F}\underline{b}$, avec $\underline{b} \in C^2$; il est clair que $\partial^1\underline{a}$ est une 2-cochaîne symétrique, et on en déduit que $\underline{b}$ aussi ; on a $\underline{F}(\partial^2\underline{b}) = \partial^2(\underline{F}\underline{b}) = \partial^2\partial^1\underline{a} = 0$, donc $\partial^2\underline{b} = 0$, puisque C^2 est sans $\underline{F}$-torsion ; il existe donc $\underline{a}' \in C^1$ tel que $\underline{b} = \partial^1\underline{a}'$ et on voit que $\partial^1\underline{a} = \underline{F}\underline{b} = \underline{F}(\partial^1\underline{a}') = \partial^1(\underline{F}\underline{a}') \in \partial^1(\underline{F}C^1)$, d'où le résultat.

4.2. Conservons les hypothèses et les notations du n° précédent et posons $M = \underline{M}(G_k)$; on a donc $M_{A'} = M_{A'}(G_k)$.

Notons $\mathfrak{L}_{A'}(G)$ l'ensemble des $\alpha \in P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha = 0$. Il est clair que c'est un sous-A'-module de $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$. Notons $\rho(G)$ l'application composée

$$\mathfrak{L}_{A'}(G) \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G) \xrightarrow{\text{proj. can.}} MH_{A'}(G) \xrightarrow{\text{iso. can.}} M_{A'} .$$

L'image par $\rho(G)$ de $\mathfrak{m}\mathfrak{L}_{A'}(G)$ est contenue dans $\mathfrak{m}M_{A'}$, lui-même contenu, avec les notations du n° 2.4, dans $M_{A'}[1]$ puisque (cor. 1 à la prop. 2.3) $M_{A'}/M_{A'}[1]$ est tué par $\mathfrak{m}$. Par passage aux quotients, $\rho(G)$ induit donc une application k-linéaire de $\mathfrak{L}_{A'}(G)/\mathfrak{m}\mathfrak{L}_{A'}(G)$ dans $M_{A'}/M_{A'}[1]$; en composant avec l'isomorphisme canonique de $M_{A'}/M_{A'}[1]$ sur $M/\underline{F}M$ (cor. 1 à la prop. 2.3), on obtient une application k-linéaire

$$\tilde{\rho}(G) : \mathfrak{L}_{A'}(G)/\mathfrak{m}\mathfrak{L}_{A'}(G) \longrightarrow M/\underline{F}M .$$

PROPOSITION 4.2.- Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A'. Posons $M = \underline{M}(G_k)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{A'}(G)$ et $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(G)$. Alors

i) l'application $\tilde{\rho} : \mathcal{L}/\mathfrak{m}\mathcal{L} \to M/\underline{F}M$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels ;

ii) le A'-module $\mathcal{L}$ est libre de rang fini.

Démonstration : remarquons d'abord que la deuxième assertion résulte facilement de la première. Soit, en effet, $\mathfrak{R}^{et}$ "la sous-algèbre étale maximale de $\mathfrak{R}$", i.e. l'algèbre affine du quotient G^{et} de G par sa composante neutre. On vérifie aisément que $\mathcal{L} \cap P(\mathfrak{R}^{et}) = 0$ et que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n P(\mathfrak{R}) = P(\mathfrak{R}^{et})$. On en déduit que $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n \mathcal{L} = 0$. D'autre part, la première assertion montre que $\mathcal{L}/\mathfrak{m}\mathcal{L}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de $M/\underline{F}M$, i.e. à la dimension d de G. Comme $\mathcal{L}$ est un sous-A'-module de $P(\mathfrak{R})$, il est sans torsion, et $\mathcal{L}$ est un A'-module libre de rang d.

Posons $\rho = \rho(G)$ et $N = CW_k(\mathfrak{R}_k)$; on a donc $CW_{k,A'}(\mathfrak{R}_k) = N_{A'}$. Reprenons les notations du §2. On voit facilement que, pour tout $(i,j) \in I_e$, l'image de l'application

$$N_i^{(j)} \xrightarrow{\text{can.}} N_{A'} \xrightarrow{w_{\mathfrak{R}}} P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$$

est contenue dans $(\mathfrak{m}^{p^{j-1}} P(\mathfrak{R}) + P'(\mathfrak{R}))/P'(\mathfrak{R})$. On en déduit que l'image par $w_{\mathfrak{R}}$ de $N_{A'}[1]$ est contenue dans $(\mathfrak{m}P(\mathfrak{R}) + P'(\mathfrak{R}))/P'(\mathfrak{R})$, donc dans $(\mathfrak{m}P(\mathfrak{R}))/P'(\mathfrak{R})$ puisque $P'(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{m}P(\mathfrak{R})$.

Soit $\alpha \in \mathcal{L}$ tel que $\rho(\alpha) \in M_{A'}[1]$. Il est clair que $M_{A'}[1] \subset N_{A'}[1]$ et on en déduit que l'image de α dans $P(\mathfrak{R})/P'(\mathfrak{R})$ est contenue dans $(\mathfrak{m}P(\mathfrak{R}))/P'(\mathfrak{R})$. Si π est une uniformisante de A', on peut donc écrire $\alpha = \pi\beta$ avec $\beta \in P(\mathfrak{R})$; on a $\pi\partial\beta = \partial(\pi\beta) = \partial\alpha = 0$, donc $\partial\beta = 0$ puisque $P(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$ est sans torsion. Donc $\beta \in \mathcal{L}$ et $\alpha = \pi\beta \in \mathfrak{m}\mathcal{L}$, ce qui prouve que $\tilde{\rho}$ est injective.

Posons alors $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}$ et considérons le complexe de Hochschild de G à valeurs dans le complété formel du groupe additif sur A'. Pour tout entier $n \geq 0$, le groupe des n-cochaînes s'identifie à $C^n = \mathfrak{R}^{\hat{\otimes} n}$ (en particulier, $C^1 = \mathfrak{R}$, $C^2 = \mathfrak{S}$). Soit $\partial^n : C^n \to C^{n+1}$ l'opérateur bord ; il est clair que $\partial^n(\mathfrak{m}C^n) \subset \mathfrak{m}C^{n+1}$ et que l'application de $C_k^n = C^n/\mathfrak{m}C^n$ dans $C_k^{n+1} = C^{n+1}/\mathfrak{m}C^{n+1}$ induite par ∂^n, par passage aux quotients, n'est autre que l'opérateur bord en

degré n de la cohomologie de Hochschild de G_k à valeurs dans le complété formel du groupe additif sur k ; nous le notons encore ∂^n.

En outre, l'application $\partial^n : C^n \to C^{n+1}$ se prolonge, de manière unique, en une application A'-linéaire continue de $P(C^n)$ dans $P(C^{n+1})$, que nous notons encore ∂^n ; on voit que $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ et que $\partial^1 : P(\mathfrak{R}) \to P(\mathfrak{S})$ n'est autre que l'application ∂.

Enfin, nous notons encore ρ l'application

$$\mathfrak{m}\mathcal{H}_{A'}(G) \xrightarrow{\text{proj. can.}} MH_{A'}(G) \xrightarrow{\text{iso. can.}} M_{A'} .$$

LEMME 4.3.- Soit $\alpha' \in P'(\mathfrak{S})$ un tenseur symétrique vérifiant $\partial^2\alpha' = 0$. Il existe $\gamma \in \mathfrak{m}\mathcal{H}_{A'}(G)$ vérifiant $\rho(\gamma) \in M_{A'}[1]$ tel que $\partial\gamma = \alpha'$.

Commençons par montrer comment la surjectivité de $\tilde{\rho}$ se déduit du lemme : comme l'application

$$\mathfrak{m}\mathcal{H}_{A'}(G) \longrightarrow M_{A'} \xrightarrow{\text{proj.}} M_{A'}/M_{A'}[1] \xrightarrow{\text{iso. can.}} M/\underline{F}M$$

est surjective, il suffit de vérifier que si $\alpha \in \mathfrak{m}\mathcal{H}_{A'}(G)$, il existe $\gamma \in \mathfrak{m}\mathcal{H}_{A'}(G)$ vérifiant $\rho(\gamma) \in M_{A'}[1]$ tel que $\alpha - \gamma \in \mathcal{L}$, i.e. tel que $\partial\alpha = \partial\gamma$. Il suffit d'appliquer le lemme à $\alpha' = \partial\alpha$.

Avant de démontrer le lemme, commençons par introduire quelques notations :

soit II l'ensemble des $(s+1)$-uples d'entiers rationnels $\underline{i} = (i_0, i_1, \ldots, i_s)$ vérifiant

$$\begin{cases} i_0 \geq 1 , \\ i_{j-1} - e + p^j - p^{j-1} \leq i_j \leq i_{j-1} , \quad \text{pour } 1 \leq j \leq s . \end{cases}$$

Pour tout $\underline{i} \in \mathrm{II}$, soit $P^{(\underline{i})}(\mathfrak{S})$ le sous-ensemble de $\mathfrak{S}_K = \mathfrak{S} \otimes_{A'} K'$ formé des sommes finies d'éléments de la forme $\lambda\alpha^{p^j}$, avec $0 \leq j \leq s$, $\lambda \in \mathfrak{m}^{i_j}$ et $\alpha \in \mathfrak{S}$; il est clair que c'est un sous-A'-module de $\mathfrak{S}_K$. On voit en outre

- que si $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_s)$ et $\underline{i}' = (i'_0, \ldots, i'_s)$ sont deux éléments de II vérifiant $i_j \leq i'_j$, pour tout j, alors $P^{(\underline{i}')}(\mathfrak{S}) \subset P^{(\underline{i})}(\mathfrak{S})$;
- que si $i_j = i_{j-1} - e + p^j - p^{j-1}$, pour tout $j \geq 1$, alors $i_j = (i_0 - 1) + p^j - je$, pour tout j, et, par conséquent, $P^{(\underline{i})}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{m}^{i_0 - 1} P'(\mathfrak{S})$;
- et que de ces deux résultats on déduit que, pour tout $\underline{i} = (i_0, \ldots, i_s) \in \mathrm{II}$,

on a $P^{(\underline{i})}(\mathcal{S}) \subset \mathfrak{m}^{i_0-1}P'(\mathcal{S})$; en particulier les $P^{(\underline{i})}(\mathcal{S})$ sont contenus dans $P'(\mathcal{S})$.

Le lemme 4.3 va résulter du lemme suivant :

LEMME 4.4.- <u>Soit</u> $\underline{i} = (i_0,\dots,i_s) \in \mathrm{I\!I}$.

i) <u>Soit</u> r <u>le plus petit entier</u> ≥ 0 <u>vérifiant</u> $i_r = i_s$ <u>et soit</u> $i = i_r = i_s$. <u>Posons</u>

$$i'_j = \begin{cases} i_j \text{ , pour } 0 \leq j \leq r-1 \text{ ,} \\ i+1+p^j-p^r-(j-r)e \text{ , pour } r \leq j \leq s \text{ .} \end{cases}$$

<u>Alors</u> $\underline{i}' = (i'_0,i'_1,\dots,i'_s) \in \mathrm{I\!I}$.

ii) <u>Soit</u> α' <u>un tenseur symétrique de</u> $P^{(\underline{i})}(\mathcal{S})$ <u>tel que</u> $\partial^2\alpha' = 0$. <u>Il existe</u> $\gamma \in \mathfrak{m}^{i_0-1}\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ <u>vérifiant</u> $\rho(\gamma) \in M_{A'}[1]$ <u>tel que</u> $\alpha' - \partial\gamma \in P^{(\underline{i}')}(\mathcal{S})$.

Commençons par montrer comment le lemme 4.4 implique le lemme 4.3 : munissons $\mathrm{I\!I}$ de l'ordre induit par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^{s+1}$.

On a $\alpha' \in P'(\mathcal{S}) = P^{(\underline{i}^0)}(\mathcal{S})$, avec $\underline{i}^0 = (1,\dots,p^j-je,\dots,p^s-se) \in \mathrm{I\!I}$, et le lemme 4.4 montre que l'on peut trouver une suite strictement croissante

$$\underline{i}^0 < \underline{i}^1 < \dots < \underline{i}^n < \underline{i}^{n+1} < \dots$$

d'éléments de $\mathrm{I\!I}$ et des éléments $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n,\dots$ de $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ vérifiant $\rho(\gamma_n) \in M_{A'}[1]$ et $\gamma_n \in \mathfrak{m}^{i_0^n-1}\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$, tels que $\alpha' - \partial(\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n) \in P^{(\underline{i}^{n+1})}(\mathcal{S})$ (on a posé $\underline{i}^n = (i_0^n,i_1^n,\dots,i_s^n)$).

On voit que le fait que la suite des $\underline{i}^n$ soit strictement croissante implique que la suite des i_0^n tend vers l'infini avec n . Comme les A'-modules $M_{A'}$, $MH_{A'}(G)$ et $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ sont visiblement séparés et complets pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et comme toutes les applications qui interviennent sont continues, on voit que la série de terme général γ_n converge dans $\mathcal{M}\mathcal{H}_{A'}(G)$ et que $\alpha' - \partial(\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n) = 0$; comme $M_{A'}[1]$ est un sous-A'-module fermé de $M_{A'}$, on a $\rho(\sum\gamma_n) = \sum\rho(\gamma_n) \in M_{A'}[1]$, d'où le lemme 4.3.

Il reste à démontrer le lemme 4.4. La première assertion se vérifie sans difficulté. Prouvons la seconde :

on voit que toute somme finie de la forme $\sum\lambda_t\beta_t^{p^{r_t}}$, avec les λ_t dans

A' , les β_t dans $\mathcal{S}$ et les r_t des entiers $\geq r$, est congrue modulo $\mathfrak{m}\mathcal{S}$ à la puissance p^r-ième d'un élément de $\mathcal{S}$. On en déduit que, si π est une uniformisante de A' , on peut écrire α' sous la forme

$$\alpha' = \pi^i\beta^{p^r} + \beta_1 \text{ ,}$$

où $\beta \in \mathcal{S}$ et où β_1 est une somme finie de termes de la forme $\pi^{i'}(\beta')^{p^j}$, avec $\beta' \in \mathcal{S}$ et ou bien $j < r$ et $i' \geq i_j$, ou bien $j = r$ et $i' > i$; en particulier on voit que $\beta_1 \in P^{(\underline{i}')}(\mathcal{S})$; en outre les i' vérifient tous $i' > i$ et $\pi^{-i}\beta_1 \in \mathfrak{m}\mathcal{S}$.

On a alors $\pi^{-i}\alpha' = \beta^{p^r} + \pi^{-i}\beta_1$ et $0 = \partial^2(\pi^{-i}\alpha') = \partial^2(\beta^{p^r}) + \partial^2(\pi^{-i}\beta_1)$. Soit $\tilde{\beta}$ l'image de β dans $\mathcal{S}_k = \mathcal{S}/\mathfrak{m}\mathcal{S} = \mathcal{C}_k^2$. Comme $\pi^{-i}\beta_1 \in \mathfrak{m}\mathcal{S} = \mathfrak{m}\mathcal{C}^2$, on a $\partial^2(\pi^{-i}\beta_1) \in \mathfrak{m}\mathcal{C}^3$ et $\partial^2(\tilde{\beta}^{p^r}) = 0$. Il est clair que $\partial^2(\tilde{\beta}^{p^r}) = (\partial^2(\tilde{\beta}))^{p^r}$ et, comme l'anneau $\mathcal{C}_k^3$ est réduit, on a $\partial^2\tilde{\beta} = 0$.

Posons $b_{-r} = \tilde{\beta}$ et soit $\underline{b}$ l'élément $(\dots,0,\dots,0,b_{-r})$ de $\widehat{CW}_k(\mathcal{S}_k)$. Le groupe $\widehat{CW}_k(\mathcal{S}_k)$ s'identifie au groupe des 2-cochaînes du complexe de Hochschild de G_k à valeurs dans $\widehat{CW}_k$. Si l'on note encore ∂^2 l'opérateur bord en degré 2 de ce complexe, on voit que $\partial^2 b_{-r} = 0$ implique que $\partial^2\underline{b} = 0$.

Mais α' est un tenseur symétrique et il en est de même de $\tilde{\beta}^{p^r}$ donc aussi de $b_{-r} = \tilde{\beta}$; on voit donc que $\underline{b}$ est un 2-cocycle symétrique. Comme $H_s^2(G_k,\widehat{CW}_k) = 0$, il existe un élément $\underline{c} = (\dots,c_{-n},\dots,c_0) \in \widehat{CW}_k(R_k)$ tel que $\partial^1\underline{c} = \underline{b}$.

Si l'on note $\underline{c}'$ le covecteur

$$\underline{c}' = (\dots,c_{-n+r},\dots,c_0,0,\dots,0)$$

(où c_0 est la composante d'indice $-r$), on voit que

$$\partial^1\underline{c}' = (\dots,0,\dots,0,b_{-r},b_{-r+1},\dots,b_0)$$

où les b_{-j} , pour $0 \leq j \leq r-1$, sont des éléments convenables de $\mathcal{S}_k$.

Choisissons pour tout n un relèvement $\hat{c}_{-n}$ de c_{-n} dans $\mathcal{R}$, et, pour $0 \leq j \leq r-1$, un relèvement $\hat{b}_{-j}$ de b_{-j} dans $\mathcal{S}$. Si l'on pose $\gamma' = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n-r}\hat{c}_{-n}^{p^{n+r}}$, on voit que γ' est un élément de $P(\mathcal{R})$ vérifiant $\partial\gamma' \equiv p^{-r}\beta^{p^r} + \sum_{j=0}^{r-1} p^{-j}\hat{b}_{-j}^{p^j} \pmod{P'(\mathcal{S})}$.

Posons $\gamma = p^r\pi^i\gamma'$; on a

$$\partial\gamma \equiv \pi^i\beta^{p^r} + \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j}\pi^i\hat{b}_{-j}^{p^j} \pmod{p^r\mathfrak{m}^i P'(\mathfrak{S})} .$$

Finalement, on peut écrire $\alpha' - \partial\gamma = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, avec $\beta_1 \in P^{(\underline{i}')}(\mathfrak{S})$, $\beta_2 = \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j}\pi^i\hat{b}_{-j}^{p^j}$ et $\beta_3 \in p^r\mathfrak{m}^i P'(\mathfrak{S})$. Montrons que β_2 et β_3 sont aussi dans $P^{(\underline{i}')}(\mathfrak{S})$:

- pour β_2 , il suffit de vérifier que $i + (r-j)e \geq i'_j = i_j$, pour $0 \leq j \leq r-1$, ce qui ne présente pas de difficultés ;
- on voit que β_3 est somme finie d'éléments de la forme $\lambda(\beta')^{p^j}$, avec $\beta' \in \mathfrak{S}$, $0 \leq j \leq s$ et $\lambda \in \mathfrak{m}^{i+re+p^j-je}$; il suffit donc de vérifier que, pour $0 \leq j \leq s$, on a $i + (r-j)e + p^j \geq i'_j$, ce qui ne présente pas, non plus, de difficultés.

On a donc $\alpha' - \partial\gamma \in P^{(\underline{i}')}(\mathfrak{S})$. Il reste à vérifier que $\gamma \in \mathfrak{m}^{i_0-1}\mathfrak{M}\mathfrak{H}_{A'}(G)$ et que $\rho(\gamma) \in M_{A'}[1]$:

- posons $\gamma'' = \pi^{p^r}\gamma'$. On voit que $\gamma'' \in \mathfrak{m}^{p^r}P(\mathfrak{R}) \subset P(\mathfrak{R})$ et que
$$\partial\gamma'' \equiv p^{-r}\pi^{p^r}\beta^{p^r} + \sum_{j=0}^{r-1} p^{-j}(\pi^{p^{r-j}}\hat{b}_{-j})^{p^j} \pmod{P'(\mathfrak{S})} ,$$
donc que $\gamma'' \in \mathfrak{M}\mathfrak{H}_{A'}(G)$; on en déduit que $\gamma = p^r\pi^{i-p^r}\gamma'' \in \mathfrak{m}^{i+re-p^r}\mathfrak{M}\mathfrak{H}_{A'}(G)$. Des inégalités $i_j \geq i_{j-1} - e + p^j - p^{j-1}$, on déduit que $i = i_r \geq i_0 - re + p^r - 1$, donc que $i + re - p^r \geq i_0 - 1$, et γ appartient bien à $\mathfrak{m}^{i_0-1}\mathfrak{M}\mathfrak{H}_{A'}(G)$.
- Enfin, comme $\partial\underline{c} = \underline{b} = (\ldots,0,\ldots,0,b_{-r})$, on a $\partial(\underline{V}\,\underline{c}) = \underline{V}(\partial\underline{c}) = \underline{V}\,\underline{b} = 0$ et $\underline{V}\,\underline{c} = (\ldots,c_{-n-1},\ldots,c_{-1}) \in \underline{M}(G_k) = M$. On a $i - e \geq p^r - (r+1)e$ et $M_{i-e}^{(r+1)}$ est un objet du diagramme $\mathcal{D}_{I_e}(M)$. Si l'on identifie M à $M^{(r+1)}$, on peut considérer $p^{-1}\pi^i \otimes \underline{V}\,\underline{c}$ comme un élément de $M_{i-e}^{(r+1)}$; comme $r+1 \geq 1$, l'image de $M_{i-e}^{(r+1)}$ dans $M_{A'}$ est contenue dans $M_{A'}[1]$. Il suffit alors pour terminer la démonstration de vérifier que $\rho(\gamma)$ est égal à l'image de $p^{-1}\pi^i \otimes \underline{V}\,\underline{c}$ dans $M_{A'}$.

4.3. Soit M un D_k-module sans $\underline{F}$-torsion, soit $\mathcal{L}$ un A'-module et soit $\rho : \mathcal{L} \to M_{A'}$ une application A'-linéaire. Comme $M_{A'}/M_{A'}[1]$ est canoniquement isomorphe à $M/\underline{F}M$ (cor. 1 à la prop. 2.3), le noyau de l'application composée

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\rho} M_{A'} \xrightarrow{\text{proj.}} M_{A'}/M_{A'}[1] \xrightarrow{\text{iso. can.}} M/\underline{F}M$$

contient $\mathfrak{m}\mathcal{L}$ et nous notons $\tilde{\rho}$ l'application k-linéaire de $\mathcal{L}/\mathfrak{m}\mathcal{L}$ dans $M/\underline{F}M$ induite par passage au quotient.

Notons $\Lambda_{A'}^{\ell}$ la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathcal{L},M,\rho)$

- où M est un D_k-module profini sans $\underline{F}$-torsion tel que le quotient $M/\underline{F}M$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k ,
- où $\mathcal{L}$ est un A'-module libre de rang fini,
- où ρ est une application A'-linéaire de $\mathcal{L}$ dans $M_{A'}$ telle que l'application k-linéaire $\tilde{\rho} : \mathcal{L}/\mathfrak{m}\mathcal{L} \to M/\underline{F}M$ soit un isomorphisme.

Un morphisme $u : (\mathcal{L},M,\rho) \to (\mathcal{L}',M',\rho')$ de la catégorie $\Lambda_{A'}^{\ell}$ est un couple $(u_{\mathcal{L}},u_M)$ formé d'une application A'-linéaire $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ et d'une application D_k-linéaire continue $u_M : M \to M'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{u_{\mathcal{L}}} & \mathcal{L}' \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho' \\ M_{A'} & \xrightarrow{u_{M,A'}} & M'_{A'} \end{array}$$

(où l'on a posé $u_{M,A'} = (u_M)_{A'}$) soit commutatif.

Il est clair que $\Lambda_{A'}^{\ell}$ est une catégorie additive.

La proposition 6.1 du chapitre III et la proposition 4.2 montrent que, si G est un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A' , le triplet $\mathcal{L}M_{A'}(G) = (\mathcal{L}_{A'}(G),\underline{M}(G_k),\rho(G))$ est un objet de $\Lambda_{A'}^{\ell}$.

Soit maintenant $f : G' \to G$ un morphisme de p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' . Par extension des scalaires, f induit un morphisme $f_k : G'_k \to G_k$ des fibres spéciales, donc une application D_k-linéaire continue $\underline{M}(f_k) : \underline{M}(G_k) \to \underline{M}(G'_k)$. Soit, d'autre part, $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{R}'$) l'algèbre affine de G (resp. G') ; le morphisme f induit un homomorphisme continu $f^* : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ qui se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme continu $f_K^* : \hat{\mathfrak{R}}_K^{an} \to (\widehat{\mathfrak{R}'})_K^{an}$. Il est clair que f_K^* envoie $P(\mathfrak{R})$ dans $P(\mathfrak{R}')$ et $\mathcal{L}(G)$ dans $\mathcal{L}(G')$. Si l'on note $\mathcal{L}(f)$ la restriction de f_K^* à $\mathcal{L}(G)$, on vérifie sans difficultés que le couple $(\mathcal{L}(f),\underline{M}(f_k))$ est un morphisme de la catégorie $\Lambda_{A'}^{\ell}$, i.e. que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(G) \arrow[r, "\mathcal{L}(f)"] \arrow[d, "\rho(G)"'] & \mathcal{L}(G') \arrow[d, "\rho(G')"] \\ \underline{M}(G_k) \arrow[r, "(\underline{M}(f_k))_{A'}"] & M(G'_k) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ceci permet de considérer $\mathcal{L}M_{A'}$ comme un foncteur contravariant de la catégorie des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' dans $\Lambda^{\ell}_{A'}$. On voit facilement que ce foncteur est additif.

4.4. Nous allons maintenant associer à tout objet $(\mathcal{L}, M, \rho)$ de $\Lambda^{\ell}_{A'}$ un foncteur covariant $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}$ de la catégorie des A'-anneaux p-adiques dans celle des groupes abéliens, en généralisant la construction faite au n° 1.3 dans le cas $e = 1$.

Soit $\mathcal{S}$ un tel anneau (nous renvoyons au § 3 pour la définition de $\mathcal{S}_K$, $P'(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}_k$ et de l'application $w_{\mathcal{S}} : CW_{k,A'}(\mathcal{S}_k) \to \mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S})$) :

- nous notons $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ (resp. $N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$) le groupe $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{A'}(\mathcal{L}, \mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S}))$ des applications A'-linéaires de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{S}_K$ (resp. dans $\mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S})$;
- nous notons $G_M(\mathcal{S})$ le groupe $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$ des applications D_k-linéaires continues de M dans $CW_k(\mathcal{S}_k)$;
- nous notons φ_ρ l'application de $G_M(\mathcal{S})$ dans $N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ qui à $u \in G_M(\mathcal{S})$ associe $w_{\mathcal{S}} \circ u_{A'} \circ \rho$; il est clair que φ_ρ est un homomorphismes de groupes ;
- enfin nous notons $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ le produit fibré $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \times_{N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})} G_M(\mathcal{S})$, où le morphisme de $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ dans $N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ est celui qui provient de la projection canonique de $\mathcal{S}_K$ sur $\mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S})$ et celui de $G_M(\mathcal{S})$ dans $N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ est φ_ρ. Autrement dit un élément de $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}(\mathcal{S})$ est un couple $(u_{\mathcal{L}}, u_M)$ où $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}_K$ est une application A'-linéaire, $u_M : M \to CW_k(\mathcal{S}_k)$ est une application D_k-linéaire continue, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L} \arrow[r, "u_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{S}_K \arrow[dr, "\text{proj.}"] & \\ M_{A'} \arrow[r, "u_{M,A'}"] & CW_{k,A'}(\mathcal{S}_k) \arrow[r, "w_{\mathcal{S}}"'] & \mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S}) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Il est clair que toutes ces constructions sont fonctorielles en $\mathcal{S}$. On voit qu'elles sont aussi fonctorielles en $(\mathcal{L}, M, \rho)$, i.e. que tout morphisme $u : (\mathcal{L}, M, \rho) \to (\mathcal{L}', M', \rho')$ induit, de manière évidente, un morphisme de foncteurs en groupes de $G_{(\mathcal{L}',M',\rho)}$ dans $G_{(\mathcal{L},M,\rho)}$.

4.5. Dans toute la suite de ce chapitre, nous notons t le plus grand entier tel que $p^t - te \le p^n - ne$, pour tout entier $n \ge 0$ (on a donc $t = s$ si $p^s - p^{s-1} < e < p^{s+1} - p^s$, $t = s + 1$ si $e = p^{s+1} - p^s$; en particulier $t = 0$ si $1 \le e < p - 1$ et $t = 1$ si $e = p - 1$).

Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A'. Pour tout A'-anneau p-adique $\mathcal{S}$, notons $G(\mathcal{S})$ le groupe des homomorphismes continus de $\mathfrak{R}$ dans $\mathcal{S}$ et, pour tout entier $r \ge 1$, $G(m^r\mathcal{S})$ l'ensemble des $x \in G(\mathcal{S})$ tels que l'image par x de l'idéal d'augmentation de $\mathfrak{R}$ est contenue dans $m^r\mathcal{S}$. Il est clair que les $G(m^r\mathcal{S})$ forment en fait une suite décroissante de sous-groupes de $G(\mathcal{S})$ et que $G(\mathcal{S})$ est séparé et complet pour la topologie définie par cette suite de sous-groupes, i.e. que $G(\mathcal{S})$ s'identifie canoniquement à $\varprojlim G(\mathcal{S})/G(m^r\mathcal{S})$.

Il est clair que $G(m\mathcal{S})$ est le noyau de l'application canonique de $G(\mathcal{S})$ dans $G(\mathcal{S}/m\mathcal{S}) = G_k(\mathcal{S}_k)$. Comme G est lisse, cette application est surjective et $G(\mathcal{S})/G(m\mathcal{S})$ s'identifie canoniquement (et fonctoriellement en $\mathcal{S}$ et en G) à $G_k(\mathcal{S}_k)$.

Si G est étale, on voit que $G(m^r\mathcal{S}) = 0$, pour tout $r \ge 1$. On en déduit que, si l'on note G^c la composante connexe de l'élément-neutre de G, on a $G(m^r\mathcal{S}) = G^c(m^r\mathcal{S})$, pour tout entier $r \ge 1$.

PROPOSITION 4.5.- <u>Soit</u> G <u>un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur</u> A' <u>et soit</u> $\mathcal{S}$ <u>un A'-anneau p-adique. Pour tout entier</u> r <u>vérifiant</u> $0 \le r < t$, <u>le groupe</u> $G(m^{p^r}\mathcal{S})/G(m^{p^{r+1}}\mathcal{S})$ <u>est d'exposant</u> p.

Démonstration : il est clair que l'on peut supposer G connexe. Soit d sa dimension, soit $\mathfrak{R}$ son algèbre affine et soit $X_1, X_2, \ldots, X_d$ des générateurs de l'idéal d'augmentation ; on a donc $\mathfrak{R} = A'[[X_1, \ldots, X_d]]$.

Soit $\Delta_p : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^{\hat{\otimes} p}$, le p-ième itéré du coproduit. Il est clair que chaque

$\Delta_p(X_i)$ est une série formelle sans terme constant en les $1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} X_j \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} 1$ et que c'est aussi un tenseur symétrique. On en déduit immédiatement que l'on peut écrire $\Delta_p(X_i) = a_i + b_i$, où a_i est un tenseur obtenu par symétrisation d'un tenseur qui est une série formelle sans terme constant et où b_i ne contient pas de terme de degré $< p$ par rapport à l'ensemble des variables.

Si l'on note η l'endomorphisme de $\mathfrak{R}$ qui définit la multiplication par p, on en déduit que $\eta(X_i) = pa'_i + b'_i$, où $a'_i = a'_i(X_1,\dots,X_d)$ et $b'_i = b'_i(X_1,\dots,X_d)$ sont des séries formelles sans terme constant et où b'_i ne contient pas de terme de degré $< p$.

Soit $x \in G(\mathfrak{m}^{p^r}\mathcal{S})$, soit $y = px$ et soit, pour $1 \le i \le d$, $x_i = x(X_i)$, $y_i = y(Y_i)$. On a

$$y_i = pa'_i(x_1,\dots,x_d) + b'_i(x_1,\dots,x_d) .$$

On voit que

$$b'_i(x_1,\dots,x_d) \in (\mathfrak{m}^{p^r})^p\mathcal{S} = \mathfrak{m}^{p^{r+1}}\mathcal{S}$$

et que

$$pa'_i(x_1,\dots,x_d) \in \mathfrak{m}^{e+p^r}\mathcal{S} \subset \mathfrak{m}^{p^{r+1}}\mathcal{S} ,$$

puisque $r \le t-1$ implique $p^{r+1} - p^r \le e$. On a donc $y_i \in \mathfrak{m}^{p^{r+1}}\mathcal{S}$, pour tout i, d'où le résultat.

4.6. Conservons les hypothèses et les notations du numéro précédent et soit $(\mathcal{L}, M, \rho) = \mathcal{L}M_{A'}(G)$.

Soit $x \in G(\mathcal{S})$; c'est un homomorphisme continu de $\mathfrak{R}$ dans $\mathcal{S}$ et il se prolonge de manière unique en un homomorphisme continu de $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$ dans $\mathcal{S}_K$; par restriction à $\mathcal{L}$, on obtient une application A'-linéaire $x_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}_K$, i.e. un élément du groupe $N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ défini au numéro précédent.

Notons $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S}) : G(\mathcal{S}) \to N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ l'application qui à x associe $x_{\mathcal{L}}$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}$, $\partial\alpha = 0$, par conséquent $\Delta\alpha = \alpha \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \alpha$ et on en déduit que $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S})$ est un homomorphisme de groupes. En outre il est clair que $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S})$ est fonctorielle en $\mathcal{S}$ et en G.

Enfin, nous notons $N^1_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ le groupe des applications A'-linéaires de $\mathcal{L}$ dans $\mathfrak{m}^{p^t}\mathcal{S}$. On a $N^1_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \subset N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) \subset N_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$. Si $t = 0$, i.e. si $e < p-1$,

on a $P'(\mathcal{S}) = \mathfrak{m}\mathcal{S}$ et $N^1_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = N^0_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$.

PROPOSITION 4.6.- *Soit* G *un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur* A' *et soit* $\mathcal{S}$ *un A'-anneau p-adique. Si* $x \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathcal{S})$, *alors* $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S})(x) = x_{\mathcal{L}} \in N^1_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ *et l'application* $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathcal{S})$ *induit, par restriction, un isomorphisme de* $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathcal{S})$ *sur* $N^1_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$.

Démonstration : il est clair que l'inclusion de G^c dans G induit un isomorphisme de $\mathcal{L}_{A'}(G)$ sur $\mathcal{L}_{A'}(G^c)$. Comme $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathcal{S}) = G^c(\mathfrak{m}^{p^t}\mathcal{S})$, on voit que l'on peut supposer G connexe.

On voit que tout élément α de $P(\mathfrak{R})$ peut s'écrire (de manière non unique) sous la forme

$$\alpha = \sum_{i=0}^{e-1} \pi^i \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} \alpha^{p^n}_{-n,i} \Big) ,$$

où π est une uniformisante de A' et où les $\alpha_{-n,i} \in \mathfrak{R}$.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ une base de $\mathcal{L}$ sur A' et écrivons chaque α_j sous la forme

$$\alpha_j = \sum_{i=0}^{e-1} \pi^i \Big(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} (\alpha^{(j)}_{-n,i})^{p^n} \Big)$$

avec les $\alpha^{(j)}_{-n,i} \in \mathfrak{R}$.

Il résulte facilement du fait que $\tilde{\rho}(G) : \mathcal{L}/\mathfrak{m}\mathcal{L} \to M/\underline{F}M$ est un isomorphisme que, si l'on pose $X_j = \alpha^{(j)}_{0,0}$, alors $X_1, X_2, \dots, X_d$ forment un système de coordonnées pour $\mathfrak{R}$, i.e. $\mathfrak{R} = A'[[X_1, X_2, \dots, X_d]]$ et les $\alpha^{(j)}_{-n,i}$ sont des séries formelles en les X_j, à coefficients dans A'. On voit que, quitte à changer les $\alpha^{(j)}_{0,1}$, on peut supposer que les X_j sont dans l'idéal d'augmentation. On doit alors avoir $\alpha_j(0,0,\dots,0) = 0$ et on en déduit facilement que l'on peut choisir les $\alpha^{(j)}_{-n,i}$ pour que ce soit des séries formelles sans terme constant (si $a^{(j)}_{-n,i} = \alpha^{(j)}_{-n,i}(0,\dots,0)$, il suffit de remplacer chaque $\sum p^{-n}(\alpha^{(j)}_{-n,i})^{p^n}$, qui est l'image par $\hat{w}_{\mathfrak{R}}$ du covecteur $\alpha^{(j)}_i = (\dots, \alpha^{(j)}_{-n,i}, \dots, \alpha^{(j)}_{0,i}) \in CW(\mathfrak{R})$, par $\hat{w}_{\mathfrak{R}}(\alpha^{(j)}_i - (\dots, a^{(j)}_{-n,i}, \dots, a^{(j)}_{0,i}))$).

LEMME 4.7.- *Soit* r *un entier* $\ge p^t$ *et soit* $b_1, b_2, \dots, b_d$ *des éléments de* $\mathfrak{m}^r\mathcal{S}$. *Alors, pour* $1 \le j \le d$,

$$\alpha_j(b_1, b_2, \dots, b_d) \equiv b_j \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}\mathcal{S}} .$$

Démonstration du lemme : fixons l'entier j et posons

$b_{-n,i} = \alpha^{(j)}_{-n,i}(b_1,b_2,\dots,b_d)$ (en particulier, on a $b_{0,0} = b_j$). Comme $\alpha^{(j)}_{-n,i}(X_1,X_2,\dots,X_d)$ est une série formelle sans terme constant, $b_{-n,i} \in \mathfrak{m}^r\mathbb{S}$; on a donc $b^{p^n}_{-n,i} \in \mathfrak{m}^{rp^n}\mathbb{S}$ et $\pi^i p^{-n} b^{p^n}_{-n,i} \in \mathfrak{m}^{i-ne+rp^n}\mathbb{S}$. On a $i-ne+rp^n = r+i+r(p^n-1)-ne \geq r+i+(p^{n+t}-p^t-ne)$. Il suffit de vérifier que $i+(p^{n+t}-p^t-ne) \geq 1$, sauf si $i = n = 0$, ce qui ne présente pas de difficulté.

Fin de la démonstration de la proposition : pour tout entier $r \geq 1$, l'application qui à $x \in G(\mathfrak{m}^r\mathbb{S})$ associe le d-uple $(a_1,a_2,\dots,a_d)$, avec $a_j = x(X_j)$, définit une bijection entre $G(\mathfrak{m}^r\mathbb{S})$ et $(\mathfrak{m}^r\mathbb{S})^d$, et l'on voit que
$x_L(\alpha_j) = \alpha_j(a_1,a_2,\dots,a_d)$.

En appliquant le lemme pour $r = p^t$ et $b_j = a_j$, on voit que si $x \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$, on a bien $x_L \in N^1_L(\mathbb{S})$.

Comme $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S}) = \varprojlim G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})/G(\mathfrak{m}^r\mathbb{S})$, il suffit, pour démontrer la deuxième assertion de vérifier que, étant donné un d-uple $(a_1,a_2,\dots,a_d)$ d'éléments de $\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S}$, il existe, pour tout entier positif r , un élément $x_r \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$, uniquement déterminé modulo $G(\mathfrak{m}^{r+1}\mathbb{S})$ tel que $x_r(\alpha_j) \equiv a_j \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}\mathbb{S}}$, pour tout j .

On procède par récurrence sur r :

- c'est clair si $r < p^t$.
- Supposons $r \geq p^t$ et soit $x_{r-1} \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$ tel que $x_{r-1}(\alpha_j) \equiv a_j \pmod{\mathfrak{m}^r\mathbb{S}}$, pour tout j . Posons $x_{r-1}(\alpha_j) = a_j - b_j$. L'élément x_r cherché doit être de la forme $x_r = x_{r-1} + y$, avec $y \in G(\mathfrak{m}^r\mathbb{S})$. Comme $(x_{r-1}+y)(\alpha_j) = x_{r-1}(\alpha_j) + y(\alpha_j)$, on doit avoir $y(\alpha_j) \equiv b_j \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}\mathbb{S}}$. Le lemme montre que pour cela il faut et il suffit que $y(X_j) \equiv b_j \pmod{\mathfrak{m}^{r+1}\mathbb{S}}$, ce qui montre l'existence et l'unicité de y , donc aussi de x_r , modulo $G(\mathfrak{m}^{r+1}\mathbb{S})$.

COROLLAIRE.- Sous les hypothèses de la proposition 4.5,

i) le groupe $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$ est sans torsion ;

ii) le sous-groupe de torsion $G_{tor}(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ de $G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ est le noyau de la restriction de $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S})$ à $G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ et son exposant divise p^t ;

iii) le sous-groupe de torsion $G_{tor}(\mathbb{S})$ de $G(\mathbb{S})$ est le noyau de $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S})$.

Démonstration :

L'assertion i) est claire car $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S}) \simeq N^1_{\mathcal{L}}(\mathbb{S})$ qui est visiblement sans torsion.

Comme $N_{\mathcal{L}}(\mathbb{S})$ est sans torsion, $G_{tor}(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ est contenu dans le noyau de la restriction de $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S})$. Réciproquement, soit $x \in G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ tel que $x_{\mathcal{L}} = 0$. Il résulte de la proposition 4.4 que $p^t x \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$; comme $(p^t x)_{\mathcal{L}} = p^t x_{\mathcal{L}} = 0$, on a $p^t x = 0$, d'où l'assertion ii).

On voit de même que $G_{tor}(\mathbb{S}) \subset \ker \varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S})$. Réciproquement, soit $x \in \ker \varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S})$, i.e. tel que $x_{\mathcal{L}} = 0$. Comme $G(\mathbb{S})/G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ est isomorphe à $G_k(\mathbb{S}_k)$ qui est un groupe de p-torsion, il existe un entier i tel que $p^i x \in G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$. Comme $(p^i x)_{\mathcal{L}} = p^i x_{\mathcal{L}} = 0$, on a $p^t(p^i x) = p^{t+i} x = 0$ et $x \in G_{tor}(\mathbb{S})$.

4.7. Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A . Notons G^f le foncteur en groupes sur la catégorie des A'-anneaux p-adiques qui, à tout A'-anneau p-adique $\mathbb{S}$, associe le groupe $G^f(\mathbb{S}) = G(\mathbb{S})$. La correspondance $G \mapsto G^f$ peut être considérée, de manière évidente, comme un foncteur covariant additif de la catégorie des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' dans celle des foncteurs en groupes sur les A'-anneaux p-adiques. On voit facilement que ce foncteur est pleinement fidèle et nous l'utilisons pour identifier la première de ces catégories à une sous-catégorie pleine de la seconde. Autrement dit, dans la suite nous écrivons G au lieu de G^f .

Pour tout p-groupe formel lisse et de dimension finie G sur A' , si $(\mathcal{L},M,\rho) = \mathcal{L}M_{A'}(G)$, nous posons $\overline{G} = G_{(\mathcal{L},M,\rho)}$. Nous nous proposons de construire deux morphismes de foncteurs en groupes

$$\varphi_G : G \to \overline{G} \qquad \text{et} \qquad \psi_G : \overline{G} \to G$$

tels que $\psi_G \circ \varphi_G = p^t.\mathrm{id}_G$ et $\varphi_G \circ \psi_G = p^t.\mathrm{id}_{\overline{G}}$.

Soit $\mathbb{S}$ un A'-anneau p-adique. On a défini au numéro précédent un homomorphisme $\varphi^{\mathcal{L}}_G(\mathbb{S}) : G(\mathbb{S}) \to N_{\mathcal{L}}(\mathbb{S})$. Si maintenant $x \in G(\mathbb{S})$, notons x_k son image dans $G_k(\mathbb{S}_k) = G(\mathbb{S})/G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$. On sait (prop. 6.2 du chap. III) que le groupe $G_k(\mathbb{S}_k)$ s'identifie canoniquement (et fonctoriellement en $\mathbb{S}$) au groupe $\mathrm{Hom}^{cont}_{D_k}(M, CW_k(\mathbb{S}_k)) = G_M(\mathbb{S})$; notons x_M l'image de x_k dans $G_M(\mathbb{S})$ (rappelons que x_M est la restriction à M de $CW_k(x_k) : CW_k(\mathfrak{R}_k) \to CW_k(\mathbb{S}_k)$).

L'application $\varphi_G^M(\mathbb{S}) : G(\mathbb{S}) \to G_M(\mathbb{S})$ qui à x associe x_M est un homomorphisme de groupes.

PROPOSITION 4.8.- Soit G un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A' et soit $(\mathcal{L}, M, \rho) = \mathcal{L}M_{A'}(G)$. Soit $\mathbb{S}$ un A'-anneau p-adique. Pour tout $x \in G(\mathbb{S})$ l'élément $\varphi_G(\mathbb{S})(x) = (x_{\mathcal{L}}, x_M)$ de $N_{\mathcal{L}}(\mathbb{S}) \times G_M(\mathbb{S})$ appartient à $\overline{G}(\mathbb{S})$. L'application $\varphi_G(\mathbb{S}) : G(\mathbb{S}) \to \overline{G}(\mathbb{S})$ ainsi définie est un homomorphisme de groupes, fonctoriel en $\mathbb{S}$; son noyau est le sous-groupe de torsion $G_{tor}(\mathfrak{m}\mathbb{S})$ de $G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$.

Démonstration : dire que $(x_{\mathcal{L}}, x_M) \in \overline{G}(\mathbb{S})$ revient à dire que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[r, "x_{\mathcal{L}}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{S}_K \arrow[r, "\text{proj.}"] & \mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S}) \\
M_{A'} \arrow[r, "x_{M,A'}"] & CW_{k,A'}(\mathbb{S}_k) \arrow[ur, "w_{\mathbb{S}}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui résulte immédiatement des définitions.

Le fait que $\varphi_G(\mathbb{S})$ est un homomorphisme de groupes (fonctoriel en $\mathbb{S}$) résulte de ce que les applications $\varphi_G^{\mathcal{L}}(\mathbb{S})$ et $\varphi_G^M(\mathbb{S})$ sont toutes les deux des homomorphismes de groupes (fonctoriels en $\mathbb{S}$).

Enfin, le noyau de $\varphi_G(\mathbb{S})$ est formé des $x \in G(\mathbb{S})$ tels que $x_{\mathcal{L}} = 0$ et $x_M = 0$. La deuxième condition est équivalente à $x_k = 0$, donc à $x \in G(\mathfrak{m}\mathbb{S})$. Le corollaire à la proposition 4.6 montre alors que $x_{\mathcal{L}} = 0$ équivaut à $x \in G_{tor}(\mathfrak{m}\mathbb{S})$.

Construisons maintenant ψ_G : soit $u = (u_{\mathcal{L}}, u_M) \in \overline{G}(\mathbb{S})$. Soit $u_k \in G_k(\mathbb{S}_k)$ l'image de u_M par l'isomorphisme canonique de $G_M(\mathbb{S})$ sur $G_k(\mathbb{S}_k)$. Choisissons un élément x de $G(\mathbb{S})$ qui relève u_k (un tel élément existe toujours car G est lisse). Si $\varphi_G(\mathbb{S})(x) = (x_{\mathcal{L}}, x_M)$, on voit que $x_M = u_M$ et que $x_{\mathcal{L}} \equiv u_{\mathcal{L}} \pmod{P'(\mathbb{S})}$ (i.e. que pour tout $\alpha \in \mathcal{L}$, $x_{\mathcal{L}}(\alpha) \equiv u_{\mathcal{L}}(\alpha) \pmod{P'(\mathbb{S})}$) puisque $(x_{\mathcal{L}}, x_M) \in \overline{G}(\mathbb{S})$.

On a $(p^t x)_{\mathcal{L}} = p^t x_{\mathcal{L}}$, donc $(p^t x)_{\mathcal{L}} \equiv p^t u_{\mathcal{L}} \pmod{p^t P'(\mathbb{S})}$, d'où on déduit que $(p^t x)_{\mathcal{L}} \equiv p^t u_{\mathcal{L}} \pmod{\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S}}$ puisque $P'(\mathbb{S}) \subset \mathfrak{m}^{p^t\text{-te}}\mathbb{S}$. Autrement dit $(p^t x)_{\mathcal{L}} - p^t u_{\mathcal{L}} \in N_{\mathcal{L}}^1(\mathbb{S})$ et, d'après la proposition 4.6, il existe un élément

$y \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$ et un seul tel que $y_{\mathcal{L}} = (p^t x)_{\mathcal{L}} - p^t u_{\mathcal{L}}$. Si l'on pose $z = p^t x - y$, on voit que $z_{\mathcal{L}} = (p^t x)_{\mathcal{L}} - y_{\mathcal{L}} = p^t u_{\mathcal{L}}$.

PROPOSITION 4.9.- Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, l'élément $z \in G(\mathbb{S})$ ne dépend pas du choix du relèvement x de u_k. L'application $\psi_G(\mathbb{S}) : \overline{G}(\mathbb{S}) \to G(\mathbb{S})$ qui à $u = (u_{\mathcal{L}}, u_M)$ associe z est un homomorphisme de groupes, fonctoriel en $\mathbb{S}$. On a $\psi_G(\mathbb{S}) \circ \varphi_G(\mathbb{S}) = p^t.\mathrm{id}_G(\mathbb{S})$ et $\varphi_G(\mathbb{S}) \circ \psi_G(\mathbb{S}) = p^t.\mathrm{id}_{\overline{G}(\mathbb{S})}$.

Démonstration : soit x' un autre relèvement de x. On a $x' \equiv x \pmod{G(\mathfrak{m}\mathbb{S})}$ et, d'après la proposition 4.4, $p^t x' \equiv p^t x \pmod{G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})}$. Si y' est l'unique élément de $G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$ tel que $(p^t x')_{\mathcal{L}} - y'_{\mathcal{L}} = p^t u_{\mathcal{L}}$, et si $z' = p^t x' - y'$, on a donc $z' - z = (p^t x' - p^t x) - y' + y \in G(\mathfrak{m}^{p^t}\mathbb{S})$ et $(z' - z)_{\mathcal{L}} = 0$, d'où $z' - z = 0$, ce qui prouve la première assertion.

Les autres assertions sont alors évidentes.

4.8. On a le résultat suivant qui généralise le théorème 1 :

THÉORÈME 2.- Si $e < p - 1$, le foncteur $\mathcal{L}M_{A'}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' et la catégorie $\Lambda_{A'}^{\ell}$.

La démonstration de ce théorème est entièrement analogue à celle du théorème 1. Donnons-en les grandes lignes :

soit G et G' deux p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' et soit $(\mathcal{L}, M, \rho) = \mathcal{L}M_{A'}(G)$, $(\mathcal{L}', M', \rho') = \mathcal{L}M_{A'}(G')$. Tout morphisme $\eta : (\mathcal{L}, M, \rho) \to (\mathcal{L}', M', \rho')$ induit de manière évidente un morphisme $\overline{\eta}^*$ de $\overline{G}' = G_{(\mathcal{L}', M', \rho')}$ dans $\overline{G} = G_{(\mathcal{L}, M, \rho)}$. Comme $e < p - 1$, on a $t = 0$, et les morphismes $\psi_G : \overline{G} \to G$ et $\varphi_{G'} : G' \to \overline{G}'$ sont des isomorphismes. Si on pose $\eta^* = \psi_G \circ \overline{\eta}^* \circ \varphi_{G'} : G' \to G$, on vérifie immédiatement que $\mathcal{L}M_{A'}(\eta^*) = \eta$ et la pleine fidélité s'en déduit.

Il reste à vérifier que $\mathcal{L}M_{A'}$ est essentiellement surjectif. Pour cela, soit $(\mathcal{L}, M, \rho)$ un objet de $\Lambda_{A'}^{\ell}$. Choisissons un p-groupe formel lisse G_k sur k dont le module de Dieudonné $M_0 = \underline{M}(G_k)$ est isomorphe à M (un tel groupe existe et est unique, à isomorphisme près, d'après la prop. 6.1 du chap. III) ainsi qu'un isomorphisme i de M sur M_0.

Soit R l'algèbre affine de G_k et choisissons un A'-anneau spécial $\mathfrak{R}$ qui relève R . Choisissons enfin un isomorphisme ι de $\mathfrak{L}$ sur un sous-A'-module $\mathfrak{L}_0$ de $P(\mathfrak{R})$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{L}_0 \arrow[r, hook] & P(\mathfrak{R}) \arrow[dr, "\text{proj.}"] & \\
& & & P(\mathfrak{R})/\mathfrak{m}\mathfrak{R} \\
M_{A'} \arrow[r, "i_{A'}"] & (M_0)_{A'} \arrow[r, hook] & CW_{k,A'}(\mathfrak{R}) \arrow[ur, "w_{\mathfrak{R}}"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif (rappelons que, comme $e \leq p-1$, on a $P'(\mathfrak{R}) = \mathfrak{m}\mathfrak{R}$). Enfin, notons ρ_0 l'application A'-linéaire $i_{A'} \circ \rho \circ \iota^{(-1)}$ de $\mathfrak{L}_0$ dans $(M_0)_{A'}$.

Pour tout A'-anneau p-adique $\mathfrak{S}$, notons $X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$ l'ensemble des homomorphismes continus de $\mathfrak{R}$ dans $\mathfrak{S}$.

Si $x \in X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$, x se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme continu de $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$ dans $\mathfrak{S}_K$; nous notons $x_{\mathfrak{L}_0}$ sa restriction à $\mathfrak{L}_0$ et $x_{\mathfrak{L}} : \mathfrak{L} \to \mathfrak{S}_K$ l'application A'-linéaire composée $x_{\mathfrak{L}_0} \circ \iota$.

De même x induit un homomorphisme continu $x_k : \mathfrak{R} \to \mathfrak{S}_k$ donc une application D_k-linéaire continue $CW_k(x_k)$ de $CW_k(\mathfrak{R})$ dans $CW_k(\mathfrak{S}_k)$; nous notons x_{M_0} sa restriction à M_0 et $x_M : M \to CW_k(\mathfrak{S}_k)$ l'application D_k-linéaire composée $x_{M_0} \circ i$. Il est clair que le théorème résulte alors du lemme suivant :

LEMME 4.10.- <u>Pour tout</u> $x \in X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$, $(x_{\mathfrak{L}}, x_M) \in G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$. <u>L'application</u> $x \to (x_{\mathfrak{L}}, x_M)$ <u>de</u> $X_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{S})$ <u>dans</u> $G_{(\mathfrak{L},M,\rho)}(\mathfrak{S})$ <u>est bijective</u>.

Il s'agit d'une généralisation du lemme 1.3 et la démonstration se transpose sans difficulté.

<u>Remarque</u> : notons $\Lambda_{A'}^{c}$ (resp. $\Lambda_{A'}^{u}$) la sous-catégorie pleine de $\Lambda_{A'}^{\ell}$ dont les objets sont les triplets (L,M,ρ) , avec M "connexe" (resp. "unipotent") (cf. n° 1.2). Par une généralisation sans difficultés des raffinements utilisés pour $e = 1$ et $p = 2$, on démontre que, si $e = p-1$ (et, bien sûr, aussi si $e < p-1$), la restriction de $\mathfrak{L}M_{A'}$ à la catégorie des p-groupes formels lisses et connexes (resp. unipotents) de dimension finie sur A' induit une antiéquivalence entre cette catégorie et la catégorie $\Lambda_{A'}^{c}$ (resp. $\Lambda_{A'}^{u}$) .

4.9. Lorsque $e \geq p-1$, le foncteur $\mathfrak{L}M_{A'}$ n'est plus essentiellement surjec-

tif, ni même, en général, pleinement fidèle. Toutefois, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 4.11.- <u>Soit</u> G <u>et</u> G' <u>deux p-groupes formels lisses et de dimension finie sur</u> A' . <u>L'homomorphisme canonique du groupe</u> $\mathrm{Hom}(G',G)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(\mathfrak{L}M_{A'}(G), \mathfrak{L}M_{A'}(G'))$ <u>est injectif et son image contient</u> $p^t.\mathrm{Hom}(\mathfrak{L}M_{A'}(G), \mathfrak{L}M_{A'}(G'))$.

<u>Démonstration</u> : soit $\mathfrak{R}$ l'algèbre affine de G . Il est clair que si $\alpha \in P(\mathfrak{R})$, alors $d\alpha \in \Omega_{A'}(\mathfrak{R})$ (on a identifié le module des A'-différentielles continues $\Omega_{A'}(\mathfrak{R})$ de $\mathfrak{R}$ à un sous-module du module des K'-différentielles continues de l'anneau $\hat{\mathfrak{R}}_K^{an}$). Il résulte immédiatement de la proposition 4.2 et de l'isomorphisme canonique entre $\omega_{G/A'}$ et $t_G^*(A')$ (cf. prop. 8.1 du chap. I) que l'application qui à α associe $d\alpha$ induit, par restriction à $\mathfrak{L}_{A'}(G)$, un isomorphisme de $\mathfrak{L}_{A'}(G)$ sur $\omega_{G/A'}$; il est clair que cet isomorphisme est fonctoriel par rapport à G .

Soit alors f un morphisme de G' dans G et soit $f_k : G'_k \to G_k$ le morphisme induit sur les fibres spéciales. Supposons que

$$\mathfrak{L}M_{A'}(f) = (\mathfrak{L}(f), \underline{M}(f_k)) = 0 .$$

- Il résulte de ce qui précède que $\mathfrak{L}(f) = 0$ implique que l'application A'-linéaire de $\omega_{G/A'}$ dans $\omega_{G'/A'}$ induite par f est nulle ; on en déduit facilement que le noyau de f contient la composante neutre G'^{c} de G' , donc que f se factorise à travers le quotient $G'^{et} = G'/G'^{c}$ qui est un groupe formel étale.
- Comme le foncteur $\underline{M}$ est fidèle, $\underline{M}(f_k) = 0$ implique $f_k = 0$; on en déduit facilement que l'image de f est contenue dans la composante neutre G^{c} de G .

On voit donc que f se factorise à travers un morphisme d'un groupe étale dans un groupe connexe et est donc bien nul.

Soit maintenant $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{L}M_{A'}(G), \mathfrak{L}M_{A'}(G'))$ et soit $\overline{\eta}^*$ le morphisme de $\overline{G}'$ dans $\overline{G}$ induit par η ; si $\eta^* = \psi_G \circ \overline{\eta}^* \circ \varphi_{G'}$, on vérifie immédiatement que $\mathfrak{L}M_{A'}(\eta^*) = p^t\eta$ et la deuxième assertion de la proposition s'en déduit.

<u>Remarque</u> : on peut montrer que, si $e \leq 2(p-1)$, la restriction de $\mathfrak{L}M_{A'}$ à la catégorie des p-groupes formels lisses et connexes, de dimension finie sur A' , est pleinement fidèle. Ceci n'est plus vrai, en revanche, si $e \geq 2p-1$ (même

en se restreignant aux groupes p-divisibles).

§5.- Groupes p-divisibles sur A' .

On conserve les hypothèses et les notations des trois paragraphes précédents.

5.1. Notons $H^{\ell}_{A'}$ la catégorie dont les objets sont les couples (L,M)

- où M est un D_k-module profini sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective, tel que le quotient $M/\underline{F}M$ est un espace vectoriel de dimension finie sur k ;
- où L est un sous-A'-module de $M_{A'}$ tel que l'application de L/mL dans $M_{A'}/M_{A'}[1]$ $(\simeq M/\underline{F}M)$ déduite, par passage aux quotients, de l'inclusion de L dans $M_{A'}$ est un isomorphisme.

Un morphisme $u : (L,M) \to (L',M')$ de la catégorie $H^{\ell}_{A'}$ est une application D_k-linéaire continue de M dans M' telle que $u_{A'}(L) \subset L'$ (où $u_{A'} : M_{A'} \to M'_{A'}$ est l'application déduite de u par fonctorialité).

Il est clair que la catégorie $H^{\ell}_{A'}$ est additive.

Nous notons $H^{d}_{A'}$ la sous-catégorie pleine de $H^{\ell}_{A'}$ dont les objets sont les couples (L,M) tels que M est libre de rang fini sur A et L est libre sur A' (si $e \leq p-1$, $M_{A'}$ est sans torsion et la deuxième assertion résulte de la première).

Si G est un p-groupe formel lisse et de dimension finie sur A' , nous notons $L_{A'}(G)$ l'image de $\mathcal{L}_{A'}(G)$ dans $M_{A'}(G_k)$ par l'application $\rho(G)$. Il résulte du n° 4.3 que le couple $LM_{A'}(G) = (L_{A'}(G), \underline{M}(G_k))$ est un objet de $H^{\ell}_{A'}$. On peut, en fait, de manière évidente, considérer $LM_{A'}$ comme un foncteur contravariant additif de la catégorie des p-groupes formels lisses et de dimension finie sur A' dans $H^{\ell}_{A'}$.

PROPOSITION 5.1.- Si G est un groupe p-divisible sur A' , $LM_{A'}(G)$ est un objet de $H^{d}_{A'}$. De plus

i) si $e < p-1$, la restriction de $LM_{A'}$ à la catégorie des groupes p-divisibles sur A' induit une anti-équivalence entre cette catégorie et $H^{d}_{A'}$;

ii) si G et G' sont deux groupes p-divisibles sur A' , l'homomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}(G',G)$ dans $\mathrm{Hom}(LM_{A'}(G), LM_{A'}(G'))$ est injectif et son image contient $p^t\mathrm{Hom}(LM_{A'}(G), LM_{A'}(G'))$.

Démonstration : si G est un groupe p-divisible sur A' , G_k est un groupe p-divisible sur k et $\underline{M}(G_k)$ est un A-module libre de rang fini (prop. 6.1 du chap. III). On voit alors que montrer que $LM_{A'}(G)$ est un objet de $H^{d}_{A'}$ revient à vérifier que l'application $\rho(G)$ est injective. Si elle ne l'était pas, on voit que l'on pourrait trouver un élément non nul $\alpha \in P'(\mathcal{R})$ tel que $\partial\alpha = \alpha \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} \alpha$. On voit que, quitte à multiplier α par une puissance convenable d'une uniformisante de A' , on peut supposer que $\alpha \in \mathcal{R}$ et $\alpha \notin m\mathcal{R}$. L'image de α dans l'algèbre affine de G_k définirait un homomorphisme non nul de G_k dans le groupe additif, ce qui n'est pas possible puisque G_k est p-divisible.

L'assertion (i) résulte alors trivialement du théorème 2 (n° 4.8) et l'assertion (ii) de la proposition 4.11.

5.2. Soit $K[\underline{F},\underline{V}]$ l'anneau (non commutatif si $k \neq \underline{F}_p$) $K\otimes_A D_k = K\otimes_A A[\underline{F},\underline{V}]$. Si M est un D_k-module, le K-espace vectoriel $M_K = K\otimes_A M$ est, de manière évidente, un $K[\underline{F},\underline{V}]$-module à gauche ; la correspondance $M \mapsto M_K$ est fonctorielle.

Notons $H^{d}_{K'}$ la catégorie dont les objets sont les couples $(L_{K'}, M_K)$

- où M_K est un $K[\underline{F},\underline{V}]$-module à gauche qui est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K ;
- où $L_{K'}$ est un sous-K'-espace vectoriel de $M_{K'} = K'\otimes_K M_K$. Un morphisme $u : (L_{K'}, M_K) \to (L'_{K'}, M'_K)$ de la catégorie $H^{d}_{K'}$ est une application $K[\underline{F},\underline{V}]$-linéaire de M_K dans M'_K telle que $u_{K'}(L_{K'}) \subset L'_{K'}$ (on a noté $u_{K'} : M_{K'} \to M'_{K'}$ l'application déduite de u par extension des scalaires).

Il est clair que $H^{d}_{K'}$ est une catégorie additive.

Enfin, on a un foncteur additif évident de la catégorie $H^{d}_{A'}$ dans $H^{d}_{K'}$: à tout objet (L,M) de $H^{d}_{A'}$, on associe le couple $(L_{K'}, M_K)$

- où $M_K = K\otimes_A M$;
- et où $L_{K'}$ est l'image dans $M_{K'} = K'\otimes_K M_K$ de $K'\otimes_{A'} L$ (d'après la propo-

sition 2.1, $M_{K'}$ s'identifie canoniquement à $K'\otimes_{A'} M_{A'}$).

En composant la restriction de $LM_{A'}$ à la catégorie des groupes p-divisibles sur A' avec ce foncteur, on obtient un foncteur contravariant additif $LM_{K'}$ de la catégorie des groupes p-divisibles sur A' dans $H^d_{K'}$.

PROPOSITION 5.2.- Soit G et G' deux groupes p-divisibles sur A' . L'homomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}(G',G)$ dans $\mathrm{Hom}(LM_{K'}(G),LM_{K'}(G'))$ est injectif et induit, par extension des scalaires, un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}(G',G)$ dans $\mathrm{Hom}(LM_{K'}(G),LM_{K'}(G'))$ (autrement dit $LM_{K'}$, considéré comme un foncteur contravariant de la catégorie des groupes p-divisibles sur A' "à isogénies près" dans $H^d_{K'}$, est pleinement fidèle).

Démonstration : il est immédiat que $\mathrm{Hom}(LM_{A'}(G),LM_{A'}(G'))$ est un $\mathbb{Z}_p$-module sans torsion et que $\mathrm{Hom}(LM_{K'}(G),LM_{K'}(G'))$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Hom}(LM_{A'}(G),LM_{A'}(G'))$. La proposition résulte alors de l'assertion (ii) de la proposition 5.1.

5.3. Soit G un groupe p-divisible sur A' . Nous allons donner une interprétation de $LM_{K'}(G) = (L_{K'}(G),M_K(G))$ en terme de "fonctions analytiques".

Soit $\mathfrak{R}$ l'algèbre affine de G . Il est clair que $K\otimes_A\mathfrak{R} = K'\otimes_{A'}\mathfrak{R}$ (resp. $K\otimes_A(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}) = K'\otimes_{A'}(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$) s'identifie au sous-anneau de $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$ (resp. $(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})^{an}_K$) formé des α tels que $p^n\alpha\in\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}$) pour n assez grand. On voit que l'on a aussi $K'\otimes_{A'}\mathfrak{R} = K'\otimes_{A'}P'(\mathfrak{R})$ et $K'\otimes_{A'}(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}) = K'\otimes_{A'}P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$.

En reprenant les notations du n° 4.1, on voit alors que

$$\mathcal{MH}^{an}_{K'}(G) = K'\otimes_{A'}\mathcal{MH}_{A'}(G)$$

s'identifie au sous-K'-espace vectoriel de $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$ formé des $\alpha\in K'\otimes_{A'}P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha\in K'\otimes_{A'}(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$ et que $K'\otimes_{A'}MH_{A'}(G)$ s'identifie au quotient $MH^{an}_{K'}(G)$ de $\mathcal{MH}^{an}_{K'}(G)$ par $K'\otimes_{A'}\mathfrak{R}$. Il est clair que l'isomorphisme de $M_{A'}(G_k)$ sur $MH_{A'}(G)$ défini au n° 4.1 induit, par extension des scalaires, un isomorphisme de $M_{K'}(G) = K'\otimes_K M_K(G) = K'\otimes_{A'}M_{A'}(G_k)$ sur $MH^{an}_{K'}(G)$.

Si l'on note $\mathcal{L}^{an}_{K'}(G)$ le K'-espace vectoriel formé des $\alpha\in K'\otimes_{A'}P(\mathfrak{R})$ tels que $\partial\alpha = 0$ et $L^{an}_{K'}(G)$ l'image de $\mathcal{L}^{an}_{K'}(G)$ dans $MH^{an}_{K'}(G)$, on voit

tout de suite que $L^{an}_{K'}(G)$ est aussi l'image de $L_{K'}(G)$ par l'isomorphisme canonique de $M_{K'}(G)$ sur $MH^{an}_{K'}(G)$.

Montrons, pour terminer, que, dans la définition de $MH^{an}_{K'}(G)$ et de $L^{an}_{K'}(G)$, on peut remplacer $K'\otimes_{A'}P(\mathfrak{R})$ par $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$. Plus précisément :

PROPOSITION 5.3.- Soit G un groupe p-divisible sur A' et soit $\mathfrak{R}$ son algèbre affine. Si $\alpha\in\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$ vérifie $\partial\alpha\in K'\otimes_{A'}(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$, alors $\alpha\in K'\otimes_{A'}P(\mathfrak{R})$.

Démonstration : il est clair qu'il existe un entier n tel que $\partial(p^n\alpha)\in\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R}\subset P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$. Avec les notations du n° 4.2, on voit que $\partial(p^n\alpha)$ est un tenseur symétrique de $P'(\mathfrak{R}\hat{\otimes}_{A'}\mathfrak{R})$ vérifiant $\partial^2(\partial(p^n\alpha)) = 0$. D'après le lemme 4.3, il existe donc $\gamma\in P(\mathfrak{R})$ tel que $\partial\gamma = \partial(p^n\alpha)$. Quitte à remplacer α par $\alpha - p^{-n}\gamma$, on voit que l'on peut supposer que $\partial\alpha = 0$.

Soit alors $\varepsilon : \mathfrak{R}\to A'$ l'homomorphisme d'augmentation et soit $\varepsilon_K : \hat{\mathfrak{R}}^{an}_K\to K'$ son prolongement à $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$. Soit I le noyau de ε et I_K celui de ε_K . On voit facilement que $\partial\alpha = 0$ implique que $\alpha\in I_K$ et que l'application qui à $\beta\in\mathcal{L}^{an}_{K'}(G)$ associe son image modulo I_K^2 définit un isomorphisme de $\mathcal{L}^{an}_{K'}(G)$ sur I_K/I_K^2 . Pour achever la démonstration, il suffit donc d'établir le lemme suivant :

LEMME 5.4.- Soit $\alpha\in I_K^2$. Si $\partial\alpha = 0$, alors $\alpha = 0$.

Démonstration : il est clair que I/I^2 est un A'-module libre de rang la dimension d de G et que I_K/I_K^2 s'identifie à $K'\otimes_{A'}(I/I^2)$. Soit $X_1,X_2,\dots,X_d$ des éléments de $\mathfrak{R}$ qui relèvent une base de I/I^2 . On voit facilement que, pour tout entier $r\geq 1$, I_K^r/I_K^{r+1} s'identifie à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré r en les X_i à coefficients dans K' et que $\Delta X_i \equiv X_i\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}X_i \pmod{I_K\hat{\otimes}I_K}$. Il résulte alors facilement de la proposition 10.4 du chapitre I que si $r\geq 2$ est tel que $\alpha\in I_K^r$, alors $\alpha\in I_K^{r+1}$; autrement dit $\alpha\in\bigcap_{r\in\mathbb{N}} I_K^r$.

Notons $\mathfrak{R}^0$ le facteur local de $\mathfrak{R}$ correspondant à l'élément-neutre et $(\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K)^0$ la composante de $\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K$ correspondante. Il est clair que $\alpha\in\bigcap I_K^r$ revient à dire que la composante α^0 de α dans $(\hat{\mathfrak{R}}^{an}_K)^0$ est nulle.

Soit A_C l'anneau des entiers du complété C d'une clôture algébrique de K' . Pour tout $x\in G(A_C) = \mathrm{Hom}^{cont}(\mathfrak{R},A_C)$, notons $x_K : \hat{\mathfrak{R}}^{an}_K\to C$ l'application qui prolonge x . Il est clair que l'application qui à $x\in G(A_C)$ associe $x(\alpha)$ définit un homomorphisme de $G(A_C)$ dans le groupe additif de C. Pour tout $x \in G(A_C)$, il existe un entier n tel que $p^n x \in G^c(A_C)$, autrement dit tel que l'application $p^n x$ se factorise à travers la projection de $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{R}^0$; on a alors $(p^r x)_K(\alpha) = 0$ (puisque $\alpha^0 = 0$), donc $p^r . x_K(\alpha) = 0$, d'où $x_K(\alpha) = 0$, pour tout $x \in G(A_C)$. On en déduit facilement que ceci implique que $\alpha = 0$.

<u>Remarque</u> : soit A_C l'anneau des entiers du complété C d'une clôture algébrique de K'. Soit G un groupe p-divisible sur A' et soit N l'unique sous-schéma en groupes fermé fini et plat de G tel que $N(A_C) = G_{tor}(mA_C)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N(A_C) & \to & G(A_C) & \to & (G/N)(A_C) & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ 0 & \to & G_{tor}(mA_C) & \to & G(A_C) & \to & \overline{G}(A_C) & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $(G/N)(A_C)$ est un groupe p-divisible (au sens élémentaire) et comme $p^t\overline{G}(A_C)$ est contenu dans l'image de $G(A_C)$, on voit que $(G/N)(A_C) = p^t\overline{G}(A_C)$. La connaissance de $LM_{A'}(G)$ détermine donc $(G/N)(A_C)$, donc aussi, d'après le théorème de pleine fidélité de Tate, le groupe p-divisible G/N.

CHAPITRE V

<u>COMPLÉMENTS</u>

§ 1.- <u>Le module de Tate</u>.

On conserve les notations des chapitres III et IV. On note B un anneau qui est soit k, soit A' (ce qui comprend le cas $B = A = W(k)$ lorsque $e = 1$). On note C le complété d'une clôture algébrique $\overline{K}'$ de K' et A_C l'anneau des entiers de C.

1.1. Soit G un groupe p-divisible sur B et soit R son algèbre affine. Pour tout B-anneau topologique S, on note $G(S)$ le groupe des homomorphismes continus du B-anneau R dans S et $G_{tor}(S)$ son sous-groupe de torsion. On voit que $G(S)$ s'identifie à $\varprojlim G(S)/p^nG(S)$, ce qui permet de considérer $G(S)$ et $G_{tor}(S)$ comme des $\mathbb{Z}_p$-modules. Nous posons

$$\begin{cases} \underline{T}(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G(S)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G_{tor}(S)) , \\ \underline{U}_0(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, G_{tor}(S)) , \\ \underline{U}(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, G(S)) . \end{cases}$$

Si, pour tout $u \in \underline{U}(G)(S)$, on pose $u(p^{-n}) = u_n$, cela permet de considérer u comme une suite $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ d'éléments de $G(S)$ vérifiant $pu_{n+1} = u_n$. On voit que $\underline{U}_0(G)(S)$ (resp. $\underline{T}(G)(S)$) s'identifie au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\underline{U}(G)(S)$ formé des u tels que $u_0 \in G_{tor}(S)$ (resp. $u_0 = 0$). On voit aussi que $\underline{U}_0(G)(S)$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}(G)(S)$.

L'application, qui à u associe u_0, définit un homomorphisme de $\underline{U}(G)(S)$ (resp. $\underline{U}_0(G)(S)$) dans $G(S)$ (resp. $G_{tor}(S)$) dont le noyau est $\underline{T}(G)(S)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \underline{T}(G)(S) & \to & \underline{U}_0(G)(S) & \to & G_{tor}(S) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \underline{T}(G)(S) & \to & \underline{U}(G)(S) & \to & G(S) \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Lorsque $G(S)$ est un groupe p-divisible (au