socie $x(\alpha)$ définit un homomorphisme de $G(A_C)$ dans le groupe additif de C. Pour tout $x \in G(A_C)$, il existe un entier n tel que $p^n x \in G^c(A_C)$, autrement dit tel que l'application $p^n x$ se factorise à travers la projection de $\mathfrak{R}$ sur $\mathfrak{R}^0$; on a alors $(p^r x)_K(\alpha) = 0$ (puisque $\alpha^0 = 0$), donc $p^r . x_K(\alpha) = 0$, d'où $x_K(\alpha) = 0$, pour tout $x \in G(A_C)$. On en déduit facilement que ceci implique que $\alpha = 0$.

<u>Remarque</u> : soit A_C l'anneau des entiers du complété C d'une clôture algébrique de K'. Soit G un groupe p-divisible sur A' et soit N l'unique sous-schéma en groupes fermé fini et plat de G tel que $N(A_C) = G_{tor}(mA_C)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N(A_C) & \to & G(A_C) & \to & (G/N)(A_C) & \to & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ 0 & \to & G_{tor}(mA_C) & \to & G(A_C) & \to & \bar{G}(A_C) & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $(G/N)(A_C)$ est un groupe p-divisible (au sens élémentaire) et comme $p^t\bar{G}(A_C)$ est contenu dans l'image de $G(A_C)$, on voit que $(G/N)(A_C) = p^t\bar{G}(A_C)$. La connaissance de $LM_{A'}(G)$ détermine donc $(G/N)(A_C)$, donc aussi, d'après le théorème de pleine fidélité de Tate, le groupe p-divisible G/N.

CHAPITRE V

<u>COMPLÉMENTS</u>

§ 1.- <u>Le module de Tate</u>.

On conserve les notations des chapitres III et IV. On note B un anneau qui est soit k, soit A' (ce qui comprend le cas $B = A = W(k)$ lorsque $e = 1$). On note C le complété d'une clôture algébrique $\bar{K}'$ de K' et A_C l'anneau des entiers de C.

1.1. Soit G un groupe p-divisible sur B et soit R son algèbre affine. Pour tout B-anneau topologique S, on note $G(S)$ le groupe des homomorphismes continus du B-anneau R dans S et $G_{tor}(S)$ son sous-groupe de torsion. On voit que $G(S)$ s'identifie à $\varprojlim G(S)/p^nG(S)$, ce qui permet de considérer $G(S)$ et $G_{tor}(S)$ comme des $\mathbb{Z}_p$-modules. Nous posons

$$\begin{cases} \underline{T}(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G(S)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G_{tor}(S)) , \\ \underline{U}_0(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, G_{tor}(S)) , \\ \underline{U}(G)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, G(S)) . \end{cases}$$

Si, pour tout $u \in \underline{U}(G)(S)$, on pose $u(p^{-n}) = u_n$, cela permet de considérer u comme une suite $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ d'éléments de $G(S)$ vérifiant $pu_{n+1} = u_n$. On voit que $\underline{U}_0(G)(S)$ (resp. $\underline{T}(G)(S)$) s'identifie au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\underline{U}(G)(S)$ formé des u tels que $u_0 \in G_{tor}(S)$ (resp. $u_0 = 0$). On voit aussi que $\underline{U}_0(G)(S)$ s'identifie canoniquement à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \underline{T}(G)(S)$.

L'application, qui à u associe u_0, définit un homomorphisme de $\underline{U}(G)(S)$ (resp. $\underline{U}_0(G)(S)$) dans $G(S)$ (resp. $G_{tor}(S)$) dont le noyau est $\underline{T}(G)(S)$, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \underline{T}(G)(S) & \to & \underline{U}_0(G)(S) & \to & G_{tor}(S) \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \underline{T}(G)(S) & \to & \underline{U}(G)(S) & \to & G(S) \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Lorsque $G(S)$ est un groupe p-divisible (au sens élémentaire !), l'application $u \mapsto u_0$ est surjective. C'est en particulier le cas lorsque $B = A'$ et $S = A_C$, auquel cas nous posons $T(G) = \underline{T}(G)(A_C)$, $U_0(G) = \underline{U}_0(G)(A_C)$, $U(G) = \underline{U}(G)(A_C)$; les lignes du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(G) \arrow[r] \arrow[d, equal] & U_0(G) \arrow[r] \arrow[d, hook] & G_{tor}(A_C) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(G) \arrow[r] & U(G) \arrow[r] & G(A_C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

sont alors exactes. On sait que $T(G)$, qui est le <u>module de Tate</u> de G, est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini égal à la hauteur h de G et que, par conséquent, $U_0(G)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}_p$ de dimension h.

<u>Remarques</u> :

1.- Il est clair que les constructions de $\underline{T}(G)(S)$, $\underline{U}_0(G)(S)$ et $\underline{U}(G)(S)$ sont, de manière évidente, fonctorielles en G et en S.

Soit $\varphi : G \to G'$ une isogénie de groupes p-divisibles sur B et soit N son noyau. On voit facilement que, pour tout S, les applications $\underline{U}_0(G)(S) \to \underline{U}_0(G')(S)$ et $\underline{U}(G)(S) \to \underline{U}(G')(S)$ sont des isomorphismes et que la suite exacte des $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, -)$ donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{T}(G)(S) \longrightarrow \underline{T}(G')(S) \longrightarrow N(S) \longrightarrow 0$$

(l'application de $\underline{T}(G')(S)$ dans $N(S)$ peut se définir ainsi : comme $G \to G'$ est une isogénie, il existe un entier r tel que $p^r G'(S) \subset \mathrm{Im}\,\varphi(S)$; on en déduit que si $u = (u_0, \dots, u_n, \dots) \in \underline{T}(G')(S)$, les u_n sont tous dans l'image de $\varphi(S)$; si $\hat{u}_n$ est un relèvement dans $G(S)$ de u_n, l'image de u dans $N(S)$ est l'image de $p^n \hat{u}_n$ pour n suffisamment grand).

2.- Soit G un groupe p-divisible sur A' et soit $G_k = G \otimes_{A'} k$ sa fibre spéciale. Soit $\mathcal{S}$ un A'-anneau p-adique et soit $\mathcal{S}_k = \mathcal{S} \otimes_{A'} k = \mathcal{S}/\mathfrak{m}\mathcal{S}$. Notons $u \mapsto \tilde{u}$ l'application canonique de $G(\mathcal{S})$ dans $G_k(\mathcal{S}_k)$. Elle induit un homomorphisme de $\underline{U}(G)(\mathcal{S})$ dans $\underline{U}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ qui est, en fait, un isomorphisme :

- cet homomorphisme est injectif : si $u = (u_0, \dots, u_n, \dots)$ est un élément non nul de $\underline{U}(G)(\mathcal{S})$, il existe un entier m tel que $u_m \neq 0$; si $\mathfrak{R}$ est l'algèbre affine de G et $\mathfrak{R}^+$ l'idéal d'augmentation, on en déduit qu'il existe un entier r tel que $u_m(\mathfrak{R}^+) \not\subset \mathfrak{m}^{r+1}\mathcal{S}$; on voit facilement que cela implique que, pour $i \leq r$, $u_{m+i}(\mathfrak{R}^+) \not\subset \mathfrak{m}^{r+1-i}\mathcal{S}$; on a donc $u_{m+r}(\mathfrak{R}^+) \not\subset \mathfrak{m}\mathcal{S}$, d'où $\tilde{u}_{m+r} \neq 0$ et l'image de u dans $\underline{U}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ n'est pas nulle.

- cet homomorphisme est surjectif : si $t = (t_0, \dots, t_n, \dots) \in \underline{U}(G_k)(\mathcal{S}_k)$, choisissons, pour tout n, un élément $\hat{t}_n \in G(\mathcal{S})$ qui relève t_n (c'est toujours possible car G est lisse) ; on voit que $(p\hat{t}_{n+1} - \hat{t}_n)(\mathfrak{R}^+) \subset \mathfrak{m}\mathcal{S}$ et on en déduit facilement que, pour tout entier n fixé, la suite des $p^m \hat{t}_{n+m}$ converge dans le groupe $G(\mathcal{S})$ (qui est séparé et complet pour la topologie p-adique) ; si on note u_n la limite de cette suite, on voit que $u = (u_0, \dots, u_n, \dots)$ est un élément de $\underline{U}(G)(\mathcal{S})$ qui relève t.

Ce résultat nous permettra d'identifier $\underline{U}_0(G)(\mathcal{S})$ et $\underline{T}(G)(\mathcal{S})$ à des sous-$\mathbb{Z}_p$-modules de $\underline{U}(G_k)(\mathcal{S}_k)$.

1.2. Soit G un groupe p-divisible sur k et soit S un k-anneau (quelconque, mais muni de la topologie discrète). On voit que $G(S)$ est un groupe de p-torsion et on a donc $\underline{U}(G)(S) = \underline{U}_0(G)(S)$.

Pour tout entier $n \geq 0$, soit G_n le noyau de la multiplication par p^n dans G. Il est clair que $\underline{T}(G)(S)$ s'identifie à $\varprojlim G_n(S)$, la flèche de $G_{n+1}(S)$ dans $G_n(S)$ étant la multiplication par p, et que $\underline{U}(G)(S)$ s'identifie à $\varprojlim G_{(n)}(S)$, où l'on a posé $G_{(n)}(S) = G(S)$, pour tout entier $n \geq 0$, et où la flèche de $G_{(n+1)}(S)$ dans $G_{(n)}(S)$ est la multiplication par p.

Soit $M = \underline{M}(G)$ le module de Dieudonné de G. La structure de D_k-module à gauche sur M se prolonge, de manière évidente, en une structure de D_k-module sur $K \otimes_A M$. L'identification de M à un sous-D_k-module de $K \otimes_A M$ permet d'identifier $K \otimes_A M$ à $\varinjlim p^{-n}M$, et la multiplication par p^n définit un isomorphisme de $p^{-n}M$ sur M. La proposition 6.2 du chapitre III implique donc le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1.- <u>Soit</u> G <u>un groupe</u> p-<u>divisible sur</u> k <u>et soit</u> $M = \underline{M}(G)$. <u>Soit</u> S <u>un</u> k-<u>anneau</u>. <u>Alors</u> $\underline{U}(G)(S) = \underline{U}_0(G)(S)$ (<u>resp</u>. $\underline{T}(G)(S)$) <u>s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en</u> S <u>et en</u> G, <u>au</u> $\mathbb{Q}_p$-<u>espace vectoriel</u> (<u>resp. au</u> $\mathbb{Z}_p$-<u>module</u>) $\mathrm{Hom}_{D_k}(K \otimes_A M, CW_k(S))$ (<u>resp</u>. $\mathrm{Hom}_{D_k}((K \otimes_A M)/M, CW_k(S))$) <u>des applications</u> D_k-<u>linéaires de</u> $K \otimes_A M$ (<u>resp</u>. $(K \otimes_A M)/M$) <u>dans</u> $CW_k(S)$.

1.3. Nous allons maintenant donner une autre description de $\underline{T}(G)(S)$ et de $\underline{U}(G)(S)$, lorsque G est un groupe p-divisible sur k et S un k-anneau, qui peut paraître plus compliquée, mais qui devrait être plus commode pour certaines applications.

Pour cela, commençons par introduire les "bivecteurs de Witt". Soit Λ un anneau commutatif quelconque. Pour tout entier $m \geq 0$, posons $CW_m(\Lambda) = CW(\Lambda)$ et $BW(\Lambda) = \varprojlim CW_m(\Lambda)$, l'application de $CW_{m+1}(\Lambda)$ dans $CW_m(\Lambda)$ étant définie par

$$(\dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0) \mapsto (\dots, a_{-n-1}, \dots, a_{-2}, a_{-1})$$

(autrement dit, c'est le décalage).

On voit que BW peut être considéré comme un foncteur covariant de la catégorie des anneaux commutatifs dans celle des groupes abéliens. Il résulte de la définition de $CW(\Lambda)$ que $BW(\Lambda)$ s'identifie, en tant qu'ensemble, à l'ensemble des "bivecteurs"

$$(\dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_m, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

où les a_n, pour $n \in \mathbb{Z}$, sont dans Λ et vérifient la condition

$$(\psi) \quad \begin{cases} \text{\underline{il existe un entier} } n_0 \text{ \underline{et un idéal nilpotent} } \mathfrak{a} \text{ \underline{de} } \Lambda \text{ \underline{tel que}} \\ a_n \in \mathfrak{a} \text{ \underline{si} } n \leq n_0 \ . \end{cases}$$

Si maintenant Λ est un k-anneau, on voit que $BW(\Lambda)$ peut encore être considéré comme un D_k-module : si $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_m, \dots) \in BW(\Lambda)$, on a

$$F\underline{a} = (\dots, a_{-n}^p, \dots, a_0^p, \dots, a_m^p, \dots) \ ,$$

$$V\underline{a} = (\dots, a_{-n-1}, \dots, a_{-1}, \dots, a_{m-1}, \dots) \ ,$$

$$[\lambda]\underline{a} = (\dots, \sigma^{-n}(\lambda)a_{-n}, \dots, \lambda a_0, \dots, \sigma^m(\lambda)a_m, \dots) \ , \text{ pour tout } \lambda \in k \ .$$

Enfin, si Λ est un k-anneau linéairement topologisé, séparé et complet, on pose $BW(\Lambda) = \varprojlim BW(\Lambda/\mathfrak{a})$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux ouverts de Λ ; les éléments de $BW(\Lambda)$ peuvent encore se représenter, de manière évidente, comme des covecteurs.

Nous allons d'autre part associer à tout anneau S de caractéristique p, un anneau parfait $\mathcal{K}(S)$, linéairement topologisé, séparé et complet, de la manière suivante :

> pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on pose $S_r = S$, et $\mathcal{K}(S) = \varprojlim S_r$, l'application de S_{r+1} dans S_r étant l'élévation à la puissance p-ième (la topologie de $\mathcal{K}(S)$ est la topologie de la limite projective, chaque S_r étant muni de la topologie discrète).

On voit qu'un élément x de $\mathcal{K}(S)$ peut se représenter comme une suite $x = (x_0, x_1, \dots, x_r, \dots)$ d'éléments de S vérifiant $x_{r+1}^p = x_r$, et que l'addition et la multiplication se font alors "composante par composante".

On voit que si S est un k-anneau, $\mathcal{K}(S)$ devient un k-anneau parfait, linéairement topologisé, séparé et complet, en posant, pour tout $\lambda \in k$ et tout $x = (x_0, x_1, \dots, x_r, \dots) \in \mathcal{K}(S)$,

$$\lambda x = (\lambda x_0, \sigma^{-1}(\lambda)x_1, \dots, \sigma^{-r}(\lambda)x_r, \dots) \ .$$

Si $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_m, \dots) \in BW(\mathcal{K}(S))$, alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, a_m peut s'écrire $a_m = (a_{m,0}, a_{m,1}, \dots a_{m,r}, \dots)$, avec les $a_{m,r}$ dans S et $a_{m,r+1}^p = a_{m,r}$. Nous notons η_0 l'application de $BW(\mathcal{K}(S))$ dans $CW_k(S)$ qui à $\underline{a} = (a_m)_{m \in \mathbb{Z}} \in BW(\mathcal{K}(S))$ associe $(\dots, a_{-n,0}, \dots, a_{-1,0}, a_{0,0})$. Il est clair que η_0 est D_k-linéaire et nous notons $BW_0(\mathcal{K}(S))$ son noyau.

PROPOSITION 1.2.- <u>Soit</u> G <u>un groupe</u> p-<u>divisible sur</u> k <u>et soit</u> $M = \underline{M}(G)$. <u>Soit</u> S <u>un</u> k-<u>anneau</u>. <u>Alors</u> $\underline{U}(G)(S)$ (<u>resp</u>. $\underline{T}(G)(S)$) <u>s'identifie canoniquement</u> (<u>et fonctoriellement en</u> S <u>et</u> G) <u>à</u> $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW(\mathcal{K}(S)))$ (<u>resp</u>. $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW_0(\mathcal{K}(S)))$).

<u>Démonstration</u> : pour tout $r \in \mathbb{N}$, posons $V_r(S) = CW_k(S)$ et soit $V(S) = \varprojlim V_r(S)$, l'application de $V_{r+1}(S)$ dans $V_r(S)$ étant la multiplication par p.

Soit $\eta_r : BW(\mathcal{K}(S)) \to CW_k(S) = V_r(S)$ l'application qui à $(\dots, a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_m, \dots)$ associe $(\dots, a_{-n+r,r}, \dots, a_{-1+r,r}, a_{r,r})$; on vérifie que η_r est D_k-linéaire et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} BW(\mathcal{K}(S)) \arrow[r, "\eta_{r+1}"] \arrow[dr, "\eta_r"'] & V_{r+1}(S) \arrow[d, "p"] \\ & V_r(S) \end{tikzcd}$$

est commutatif. On obtient donc ainsi une application D_k-linéaire $\eta : BW(\mathcal{K}(S)) \to V(S)$.

On vérifie tout de suite que η est injective. Mais η est aussi surjective : soit $\underline{b} = (\underline{b}_r)_{r \in \mathbb{N}} \in V(S)$, avec $\underline{b}_r \in V_r(S) = CW_k(S)$. Si $\underline{b}_r = (\dots, b_{-n,r}, \dots, b_{-1,r}, b_{0,r})$, on voit que $b_{-n-1,r+1}^p = b_{-n,r}$, pour tout n

et tout r ; on en déduit que $\underline{b} = \eta(\underline{a})$, avec $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_0, \dots, a_m, \dots)$ et

$$\begin{cases} a_{-n} = (b_{-n,0}, b_{-n-1,1}, \dots, b_{-n-r,r}, \dots) & \text{pour } n \geq 0 . \\ a_m = (b_{0,m}^{p}, b_{0,m}^{p^{m-1}}, \dots, b_{0,m}, b_{-1,m+1}, \dots, b_{m-s,s}, \dots) & \text{pour } m > 0 . \end{cases}$$

Par conséquent, η est un isomorphisme.

Or, si l'on pose $G_{(r)}(S) = G(S)$, on a $\underline{U}(G)(S) = \varprojlim G_{(r)}(S)$, la flèche de $G_{(r+1)}(S)$ dans $G_{(r)}(S)$ étant la multiplication par p . Comme $G_{(r)}(S) = G(S)$ s'identifie canoniquement (et fonctoriellement) à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, CW_k(S))$ (cf. prop. 6.2 du chap.III) $= \mathrm{Hom}_{D_k}(M, V_r(S))$, on voit que $\underline{U}(G)(S) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{D_k}(M, V_r(S))$ est aussi $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, \varprojlim V_r(S))$ qui s'identifie à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW(\mathcal{N}(S)))$ en utilisant l'isomorphisme η .

Un élément u de $\underline{U}(G)(S)$ est dans $\underline{T}(G)(S)$ si et seulement si son image dans $G_{(0)}(S)$ est nulle ; si on identifie $\underline{U}(G)(S)$ à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW(\mathcal{N}(S)))$, on voit que cela revient à dire que $\eta_0 \circ u = 0$, donc que $u \in \mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW_0(\mathcal{N}(S)))$.

1.4. Soit $\mathcal{S}$ un A'-anneau p-adique. Notons $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ l'ensemble des familles $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{S}$, indexées par les entiers rationnels, vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soient $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ et $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$. Il est clair que, pour tout entier n fixé, la suite des $(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ est convergente dans $\mathcal{S}$; si l'on note $z^{(n)}$ sa limite, on voit que $z = (z^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}}$ est un élément de $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$.

On vérifie alors facilement que l'on munit $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ d'une structure de k-anneau en posant, pour $x, y \in \mathrm{Res}(\mathcal{S})$

$$\begin{cases} (x+y)^{(n)} = \lim\limits_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m} , \\ (xy)^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)} \\ (\lambda x)^{(n)} = \sigma^{-n}([\lambda]) x^{(n)} = [\sigma^{-n}(\lambda)] \, x^{(n)} , \text{ pour tout } \lambda \in k \quad (\text{où } [\lambda] \text{ est le} \\ \text{représentant de Teichmüller de } \lambda \text{ dans } W(k) = A \subset A') . \end{cases}$$

Notons $\mathrm{Res}^{+}_{A'}(\mathcal{S})$ le sous-ensemble de $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ formé des x tels que $x^{(0)} \in \mathfrak{m}\mathcal{S}$. On vérifie immédiatement que $\mathrm{Res}^{+}_{A'}(\mathcal{S})$ est un idéal de $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ et que $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ est séparé et complet pour la topologie $\mathrm{Res}^{+}_{A'}(\mathcal{S})$-adique.

PROPOSITION 1.3.- *Soit* $\mathcal{S}$ *un* A'-*anneau* p-*adique et soit* $\mathcal{S}_k = \mathcal{S} \otimes_{A'} k = \mathcal{S}/\mathfrak{m}\mathcal{S}$. *Les* k-*anneaux topologiques* $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ *et* $\mathcal{N}(\mathcal{S}_k)$ *sont isomorphes, canoniquement et fonctoriellement en* $\mathcal{S}$.

Démonstration : pour tout $s \in \mathcal{S}$, notons $\tilde{s}$ son image dans $\mathcal{S}_k$. Si $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Res}(\mathcal{S})$, on voit que $\tilde{x} = (\widetilde{x^{(0)}}, \dots, \widetilde{x^{(n)}}, \dots) \in \mathcal{N}(\mathcal{S}_k)$ et il est immédiat que l'application $x \mapsto \tilde{x}$ est un homomorphisme continu de $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{S}_k)$. Si $u = (u_0, \dots, u_n, \dots) \in \mathcal{N}(S_k)$, notons $\hat{u}_n$ un relèvement de u_n dans $\mathcal{S}$. On voit facilement que, pour tout entier n fixé, la suite des $\hat{u}_{n+m}^{p^m}$ converge dans $\mathcal{S}$ vers un élément $\hat{u}^{(n)}$, ne dépendant pas du choix des relèvements, et que $\hat{u} = (\hat{u}^{(n)})_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Res}(\mathcal{S})$. On vérifie que l'application $u \to \hat{u}$ est continue et que les applications $x \to \tilde{x}$ et $u \to \hat{u}$ sont inverses l'une de l'autre.

Remarque : soit K" un sous-corps du corps des fractions K' de A' contenant le corps des fractions K de A = W(k) et soit $\mathfrak{m}_{A''}$ l'idéal maximal de A" . Tout A'-anneau p-adique $\mathcal{S}$ peut être considéré comme un A"-anneau p-adique. Les k-anneaux topologiques $\mathcal{N}(\mathcal{S}/\mathfrak{m}\mathcal{S})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{S}/\mathfrak{m}_{A''}\mathcal{S})$ sont canoniquement isomorphes puisqu'ils s'identifient tous deux à $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$. Sur $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$, les topologies $\mathrm{Res}^{+}_{A'}(\mathcal{S})$-adiques et $\mathrm{Res}^{+}_{A''}(\mathcal{S})$-adiques coïncident donc, mais l'inclusion $\mathrm{Res}^{+}_{A'}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Res}^{+}_{A''}(\mathcal{S})$ est, en général, stricte.

Compte-tenu de la remarque 2 du n°1.1 et de la proposition 1.2, la proposition 1.3 implique le résultat suivant :

COROLLAIRE. - *Soit* G *un groupe* p-*divisible sur* A' *et soit* $M = \underline{M}(G_k)$. *Pour tout* A'-*anneau* p-*adique* $\mathcal{S}$, $\underline{U}(G)(\mathcal{S})$ *s'identifie canoniquement (et fonctoriellement en* $\mathcal{S}$ *et* G) *à* $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S})))$.

1.5. Le reste de ce paragraphe est consacré à donner une description de $U_0(G)$, et plus généralement de $\underline{U}_0(G)(\mathcal{S})$ pour tout A'-anneau p-adique $\mathcal{S}$, lorsque G est un groupe p-divisible sur A' , à l'aide du couple $LM_{K'}(G) = (L_{K'}(G), M_K(G))$ défini au n°IV.5.2.

Commençons par énoncer les résultats (nous les démontrerons dans les n$^{\text{os}}$ suivants) :

PROPOSITION 1.4.- Soit $\mathbb{S}$ un A'-anneau p-adique et soit $\mathbb{S}_K = K \otimes_A \mathbb{S} = K' \otimes_{A'} \mathbb{S}$:

i) pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in BW(Res(\mathbb{S}))$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n x_n^{(n)}$ converge dans $\mathbb{S}_K$;

ii) l'application $bw_{\mathbb{S}} : BW(Res(\mathbb{S})) \to \mathbb{S}_K$, qui à $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n x_n^{(n)}$, est K-linéaire.

THÉORÈME 1.- Soit G un groupe p-divisible sur A' et soit $(L_{K'}, M_K) = LM_{K'}(G)$. Pour tout A'-anneau p-adique $\mathbb{S}$, posons $\mathbb{S}_K = K \otimes_A \mathbb{S} = K' \otimes_{A'} \mathbb{S}$ et soit $bw_{\mathbb{S},K'} : K' \otimes_K BW(Res(\mathbb{S})) \to \mathbb{S}_K$ l'application K'-linéaire déduite de $bw_{\mathbb{S}}$ par extension des scalaires. Pour tout $u \in Hom_{K[\underline{F},\underline{V}]}(M_K, BW(Res(\mathbb{S})))$, notons $u_{K'} : K' \otimes_K M_K \to K' \otimes_K BW(Res(\mathbb{S}))$ l'application K'-linéaire déduite de u par extension des scalaires. Alors $\underline{U}_0(G)(\mathbb{S})$ s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en G et $\mathbb{S}$, au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $Hom_{K[\underline{F},\underline{V}]}(M_K, BW(Res(\mathbb{S})))$ formé des u tels que $u_{K'}(L_{K'}) \subset \ker bw_{\mathbb{S},K'}$.

Nous démontrerons en fait un résultat plus précis : si G est un groupe p-divisible sur A' , notons G_m le plus petit sous-schéma en groupes fermé de G tel que, pour tout A'-anneau p-adique $\mathbb{S}$, $G_m(\mathbb{S})$ est le noyau de $G_{tor}(\mathbb{S}) \to G_k(\mathbb{S}_k)$ (il revient au même de dire que c'est le plus petit sous-schéma en groupes fermé de G tel que $G_m(A_C)$ est le noyau de $G_{tor}(A_C) \to G_k(A_C/mA_C)$. On voit facilement que G_m est un schéma en groupes fini et plat sur A' et que le quotient G/G_m (dans la catégorie des faisceaux en groupes fppf sur A') est un groupe p-divisible isogène à G .

PROPOSITION 1.5.- Conservons les hypothèses et les notations du théorème précédent et soit $M = \underline{M}(G_k)$ (identifié à un sous-D_k-module de $M_K = K \otimes_A M$). Soit $BW^+_{/A'}(Res(\mathbb{S}))$ le sous-D_k-module de $BW(Res(\mathbb{S}))$ formé des $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tels que $x_n^{(0)} \in Res^+_{A'}(\mathbb{S})$ pour $n \le 0$. Alors $\underline{T}(G/G_m)(S)$ s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en G et $\mathbb{S}$, au sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $Hom_{D_k}(M, BW^+_{/A'}(Res(\mathbb{S})))$ formé des u tels que $u_{K'}(L_{K'}) \subset \ker bw_{\mathbb{S},K'}$.

Remarques :

1.- Si $e < p-1$, ou si $e = p-1$ et si G est unipotent, on voit (cf. n°IV.4.8) que $G_m = 0$, donc que $\underline{T}(G/G_m)(\mathbb{S}) = \underline{T}(G)(\mathbb{S})$.

2.- On voit facilement que $BW(Res(\mathbb{S}))$ s'identifie à $K \otimes_A BW^+_{/A'}(Res(\mathbb{S}))$. On en déduit que $Hom_{K/[\underline{F},\underline{V}]}(M_K, BW(Res(\mathbb{S}))) = Hom_{D_k}(M_K, BW(Res(\mathbb{S})))$ s'identifie à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} Hom_{D_k}(M, BW^+_{/A'}(Res(\mathbb{S})))$. Comme la projection de G sur G/G_m est une isogénie, $\underline{U}_0(G)(\mathbb{S})$ et $\underline{U}_0(G/G_m)(\mathbb{S})$ s'identifient et le théorème 1 résulte donc de la proposition 1.5.

1.6. Commençons par démontrer la proposition 1.4.

Rappelons que l'on a défini au n°II.5.1 une application A-linéaire continue $\hat{w}_{\mathbb{S}} : CW(\mathbb{S}) \to \mathbb{S}_K$. On voit (cf. n°IV.3.1) que l'image par $\hat{w}_{\mathbb{S}}$ de $CW(m\mathbb{S})$ est contenue dans $P'(\mathbb{S})$ et, par passage aux quotients, on en déduit une application $w^0_{\mathbb{S}} : CW(\mathbb{S}_k) \to \mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$.

Reprenons les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 1.2 et soit, pour tout entier $r \ge 0$,

$$w^r_{\mathbb{S}} : V_r(\mathbb{S}_k) = CW_k(\mathbb{S}_k) \to \mathbb{S}_K/p^r P'(\mathbb{S})$$

l'application obtenue en composant $w^0_{\mathbb{S}}$ avec l'application de $\mathbb{S}_K/P'(\mathbb{S})$ dans $\mathbb{S}_K/p^r P'(\mathbb{S})$ déduite, par passage aux quotients, de la multiplication par p^r dans $\mathbb{S}_K$. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd} V_{r+1}(\mathbb{S}_k) \arrow[r, "w^{r+1}_{\mathbb{S}}"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{S}_K/p^{r+1}P'(\mathbb{S}) \arrow[d, "\text{proj.can.}"] \\ V_r(\mathbb{S}_k) \arrow[r, "w^r_{\mathbb{S}}"] & \mathbb{S}_K/p^r\mathbb{S} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

On sait que $BW(Res(\mathbb{S})) = BW(\mathcal{K}(\mathbb{S}_k))$ s'identifie à $\varprojlim V_r(\mathbb{S}_k)$; comme il existe un entier ν tel que $P'(\mathbb{S}) \subset p^\nu \mathbb{S}$, $\varprojlim \mathbb{S}_K/p^r P'(\mathbb{S})$ s'identifie à $\mathbb{S}_K$. Par passage à la limite, les applications $w^r_{\mathbb{S}}$ définissent donc une application A-linéaire $bw^0_{\mathbb{S}}$ de $BW(Res(\mathbb{S}))$ dans $\mathbb{S}_K$ et il suffit, pour démontrer la proposition 1.4, d'établir le lemme suivant :

LEMME 1.6.- On a $bw^0_{\mathbb{S}} = bw_{\mathbb{S}}$ (i.e., pour tout $\underline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in BW(Res(\mathbb{S}))$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n x_n^{(n)}$ converge et $bw^0_{\mathbb{S}}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n x_n^{(n)}$).

Démonstration : si $\underline{a} = (\dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0) \in V_r(\mathbb{S}_k) = CW_k(\mathbb{S}_k)$ et si $\hat{a}_{-n}$ est un relèvement de a_{-n} dans $\mathbb{S}$, on voit que $w^r_{\mathbb{S}}(\underline{a})$ est l'image, modulo $p^r P'(\mathbb{S})$, de $\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n+r} \hat{a}_{-n}^{p^n}$.

Lorsque l'on identifie $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$ à $\kappa(\mathcal{S}_k)$, $x_n = (x_n^{(m)})_{m\in\mathbb{Z}}$ s'identifie à $\tilde{x}_n = (\widetilde{x_n^{(0)}},\dots,\widetilde{x_n^{(m)}},\dots)$ (où $\widetilde{x_n^{(m)}}$ est l'image de $x_n^{(m)}$ dans $\mathcal{S}_k$).

On voit que l'image $\eta_r(\underline{x})$ de $\underline{x}$ dans $V_r(\mathcal{S}_k) = CW(\mathcal{S}_k)$ est $(\dots,\widetilde{x^{(r)}_{-n+r}},\dots,\widetilde{x^{(r)}_{-1+r}},\widetilde{x^{(r)}_r})$; comme $x^{(r)}_{-n+r}$ est un relèvement dans $\mathcal{S}$ de $\widetilde{x^{(r)}_{-n+r}}$, $w^r_{\mathcal{S}}(\eta_r(\underline{x}))$ est l'image, modulo $p^rP'(\mathcal{S})$, de

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n+r}(x^{(r)}_{-n+r})^{p^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{-n+r} x^{(r-n)}_{-n+r} = \sum_{-\infty}^{r} p^n x_n^{(n)},$$

et, en passant à la limite, on a bien $bw_{\mathcal{S}}(\underline{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p^n x_n^{(n)}$.

1.7. Démontrons maintenant la proposition 1.5.

Posons $(L,M) = LM_{A'}(G)$ et soit ρ l'inclusion de L dans $M_{A'}$. Soit $\overline{G} = G_{(L,M,\rho)}$ le foncteur en groupes sur la catégorie des A'-anneaux p-adiques défini au n° IV.4.7. Commençons par établir un lemme :

LEMME 1.7.- <u>Le $\mathbb{Z}_p$-module $\underline{T}(G/G_m)(\mathcal{S})$ s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en G et en $\mathcal{S}$, à</u>

$$\underline{T}(\overline{G})(\mathcal{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\overline{G}(\mathcal{S})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\overline{G}_{tor}(\mathcal{S})).$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit $\underline{U}_0(\overline{G})(\mathcal{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p,\overline{G}_{tor}(\mathcal{S}))$. Tout élément de $\underline{U}_0(\overline{G})(\mathcal{S})$ peut s'écrire sous la forme $\bar{u} = (\bar{u}_0,\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n,\dots)$, avec $\bar{u}_n \in \overline{G}_{tor}(\mathcal{S})$ et $p\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n$. Soit $\psi' : \underline{U}_0(\overline{G})(\mathcal{S}) \to \underline{U}_0(G)(\mathcal{S})$ l'application qui à $\bar{u}$ associe $\psi'(\bar{u}) = (\psi_G(\mathcal{S})(\bar{u}_t),\psi_G(\mathcal{S})(\bar{u}_{t+1}),\dots,\psi_G(\mathcal{S})(\bar{u}_{t+n}),\dots)$ (où t est l'entier défini au n° IV.4.5 et où $\psi_G : \overline{G} \to G$ est le morphisme défini au n° IV.4.7).

Comme $\psi_G(\mathcal{S})\circ\varphi_G(\mathcal{S}) = p^t.\mathrm{id}_{G(\mathcal{S})}$ et $\varphi_G(\mathcal{S})\circ\psi_G(\mathcal{S}) = p^t.\mathrm{id}_{\overline{G}(\mathcal{S})}$ (cf. prop. 4.9 du chap. IV), on voit que ψ' est un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels.

Pour tout $u \in G(\mathcal{S})$, notons u' son image dans $(G/G_m)(\mathcal{S})$ et soit $\varphi' : \underline{U}_0(G)(\mathcal{S}) \to \underline{U}_0(G/G_m)(\mathcal{S})$ l'application qui, à $(u_0,u_1,\dots,u_n,\dots) \in \underline{U}_0(G)(\mathcal{S})$, associe $(u'_0,u'_1,\dots,u'_n,\dots)$. Il est clair que φ' est aussi un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels.

L'application $\varphi'\circ\psi'$ est donc un isomorphisme de $\underline{U}_0(\overline{G})(\mathcal{S})$ sur

$\underline{U}_0(G/G_m)(\mathcal{S})$. Pour achever la démonstration du lemme, il suffit alors de vérifier que, si $\bar{u} \in \underline{U}_0(\overline{G})(\mathcal{S})$, $\varphi'(\psi'(\bar{u})) \in \underline{T}(G/G_m)(\mathcal{S})$ si et seulement si $\bar{u} \in \underline{T}(\overline{G})(\mathcal{S})$:

Posons $\bar{u} = (\bar{u}_0,\bar{u}_1,\dots,\bar{u}_n,\dots)$, $\psi'(\bar{u}) = u = (u_0,u_1,\dots,u_n,\dots)$ et $\varphi'(u) = u' = (u'_0,u'_1,\dots,u'_n,\dots)$. On voit que $u' \in \underline{T}(G/G_m)(\mathcal{S})$ si et seulement si $u'_0 = 0$, ou encore si et seulement si u_0 appartient au noyau de la projection de $G(\mathcal{S})$ dans $(G/G_m)(\mathcal{S})$, qui est $G_m(\mathcal{S})$. On voit que $G_m(\mathcal{S}) = G_{tor}(m\mathcal{S})$ est le noyau de $\varphi_G(\mathcal{S})$ (prop. 4.8 du chap.IV). Donc $u' \in \underline{T}(G/G_m)(\mathcal{S})$ si et seulement si $\varphi_G(\mathcal{S})(u_0) = 0$; comme $u_0 = \psi_G(\mathcal{S})(\bar{u}_t)$, ceci est équivalent à $\psi_G(\mathcal{S})\circ\varphi_G(\mathcal{S})(\bar{u}_t) = 0$; comme $\psi_G(\mathcal{S})\circ\varphi_G(\mathcal{S}) = p^t.\mathrm{id}_{\overline{G}(\mathcal{S})}$, c'est encore équivalent à $p^t\bar{u}_t = 0$, i.e. à $\bar{u}_0 = 0$, ou à $\bar{u} \in \underline{T}(\overline{G})(\mathcal{S})$.

<u>Démonstration de la proposition 1.5</u> : on sait (prop. 1.2) que $\underline{T}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M,BW_0(\kappa(\mathcal{S}_k)))$. Lorsque l'on identifie, à l'aide de la proposition 1.3, $\kappa(\mathcal{S}_k)$ à $\mathrm{Res}(\mathcal{S})$, donc $BW(\kappa(\mathcal{S}_k))$ à $BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S}))$, on voit que $BW_0(\kappa(\mathcal{S}_k))$ s'identifie à $BW^+_{/A'}(\mathrm{Res}(\mathcal{S}))$. On peut donc identifier $\underline{T}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M,BW^+_{/A'}(\mathrm{Res}(\mathcal{S})))$.

Rappelons (cf. n° IV.4.4) que le groupe $\overline{G}(\mathcal{S})$ est formé des couples (u_L,u_M), avec $u_L \in \mathrm{Hom}_{A'}(L,\mathcal{S}_K)$, $u_M \in \mathrm{Hom}_{D_k}(M,CW_k(\mathcal{S}_k))$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "u_L"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{S}_K \arrow[dr, "\text{proj.can.}"] & \\
& & \mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S}) \\
M_{A'} \arrow[r, "u_{M,A'}"] & CW_{k,A'}(\mathcal{S}_k) \arrow[ur, "w_{\mathcal{S}}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme $\mathrm{Hom}_{A'}(L,\mathcal{S}_K)$ est sans torsion, on voit que $(u_L,u_M) \in \overline{G}_{tor}(\mathcal{S})$ si et seulement si $u_L = 0$. On en déduit que le sous-groupe $\overline{G}_{tor}(\mathcal{S})$ de $\overline{G}(\mathcal{S})$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{D_k}(M,CW_k(\mathcal{S}_k))$ formé des u_M tels que $w_{\mathcal{S}}\circ u_{M,A'}\circ\rho = 0$.

La proposition 6.2 du chapitre III montre que $\mathrm{Hom}_{D_k}(M,CW_k(\mathcal{S}_k))$ s'identifie à $G_k(\mathcal{S}_k)$. En particulier, l'application de $\overline{G}_{tor}(\mathcal{S})$ dans $G_k(\mathcal{S}_k)$ qui en résulte est injective et $\underline{T}(\overline{G})(\mathcal{S})$ s'identifie à un sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\underline{T}(G_k)(\mathcal{S}_k)$.

Lorsque l'on identifie $\underline{T}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ à $\mathrm{Hom}_{D_k}(M, BW^+{}_{/A'}(\mathrm{Res}(\mathcal{S})))$, tout élément $u \in \underline{T}(G_k)(\mathcal{S}_k)$ peut s'écrire sous la forme $u = (u_0, u_1, \ldots, u_r, \ldots)$ avec $u_r \in \mathrm{Hom}_{D_k}(M, V_r(\mathcal{S}_k)) = \mathrm{Hom}_{D_k}(M, CW_k(\mathcal{S}_k))$, $u_0 = 0$ et $pu_{r+1} = u_r$. On voit immédiatement qu'un tel $u \in \underline{T}(\overline{G})(\mathcal{S}_k)$ si et seulement si, pour tout entier $r \geq 0$, $w_{\mathcal{S}} \circ u_{r,A'} \circ \rho = 0$.

Pour tout entier $r \geq 0$, posons $V_{r,A'}(\mathcal{S}_k) = CW_{k,A'}(\mathcal{S}_k)$ et soit $w_{\mathcal{S},r} : V_{r,A'}(\mathcal{S}_k) \to \mathcal{S}_K/p^r P'(\mathcal{S})$ l'application obtenue en composant $w_{\mathcal{S}}$ avec l'application de $\mathcal{S}_K/P'(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{S}_K/p^r P'(\mathcal{S})$ obtenue, par passage aux quotients, à partir de la multiplication par p^r dans $\mathcal{S}_K$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
M_{A'} \arrow[r, "u_{r+1,A'}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & V_{r+1,A'}(\mathcal{S}_k) \arrow[r, "w_{\mathcal{S},r+1}"] \arrow[d, "p"] & \mathcal{S}_K/p^{r+1}P'(\mathcal{S}) \arrow[d, "\mathrm{proj.can.}"] \\
M_{A'} \arrow[r, "u_{r,A'}"] \arrow[d] & V_{r,A'}(\mathcal{S}_k) \arrow[r, "w_{\mathcal{S},r}"] \arrow[d] & \mathcal{S}_K/p^r P'(\mathcal{S}) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

qui, par passage à la limite, défini des applications

$$M_{A'} \xrightarrow{u_{\infty,A'}} \varprojlim V_{r,A'}(\mathcal{S}_k) \xrightarrow{w_{\mathcal{S},\infty}} \mathcal{S}_K$$

et il est clair que $u \in \underline{T}(G)(\mathcal{S})$ si et seulement si $w_{\mathcal{S},\infty} \circ u_{\infty,A'} \circ \rho = 0$.

Il résulte facilement de la proposition 2.5 du chapitre IV que l'application canonique de $A' \otimes_A CW_k(\mathcal{S}_k)$ dans $CW_{k,A'}(\mathcal{S}_k)$ est surjective et que son noyau est tué par une puissance de p (qui ne dépend que de l'indice de ramification absolu e de A'). Comme $\varprojlim V_r(\mathcal{S}_k)$ s'identifie à $BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S}))$, on en déduit que $\varprojlim V_{r,A'}(\mathcal{S}_k)$ s'identifie à $A' \otimes_A BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S})) = K' \otimes_K BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S}))$. Il est immédiat que l'application $w_{\mathcal{S},\infty} : K' \otimes_K BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S})) \to \mathcal{S}_K$ s'identifie à $bw_{\mathcal{S},K'}$ et on voit facilement que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d, hook] & M_{A'} \arrow[dr, "u_{\infty,A'}"] \arrow[d] & \\
 & & BW(\mathrm{Res}(\mathcal{S})) \\
K' \otimes_A L \simeq L_{K'} \arrow[r, hook] & K' \otimes_K M \simeq K' \otimes_{A'} M_{A'} \arrow[ur, "u_{K'}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On a donc $bw_{\mathcal{S},K'} \circ u_{\infty,A'}(L) = 0$ si et seulement si $u_{K'}(L_{K'}) \subset \ker bw_{\mathcal{S},K'}$, ce qui achève la démonstration.

1.8. Remarques :

1.- Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{K}'/K')$. Le groupe $\mathcal{G}$ opère, par continuité, sur C et sur A_C , donc aussi, par fonctorialité, sur $\mathrm{Res}(A_C)$, sur $BW(\mathrm{Res}(A_C))$ et sur $BW_{K'}(\mathrm{Res}(A_C)) = K' \otimes_K BW(\mathrm{Res}(A_C))$; en outre, il est clair que l'application $bw_{A_C,K'} : BW_{K'}(\mathrm{Res}(A_C)) \to C$ est $\mathcal{G}$-linéaire.

Soit V un $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-module à gauche, de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, avec action de $\mathcal{G}$ continue. Notons $M_K^{\mathcal{G}}(V)$ le $K[\underline{F},\underline{V}]$-module à gauche $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]}(V, BW(\mathrm{Res}(A_C)))$ des applications $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-linéaires de V dans $BW(\mathrm{Res}(A_C))$. On voit que le K'-espace vectoriel $M_{K'}^{\mathcal{G}}(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]}(V, BW_{K'}(\mathrm{Res}(A_C)))$ s'identifie canoniquement à $K' \otimes_K M_K^{\mathcal{G}}(V)$. Nous notons $L_{K'}^{\mathcal{G}}(V)$ le sous-K'-espace vectoriel de $M_{K'}^{\mathcal{G}}(V)$ formé des éléments dont l'image appartient au noyau de $bw_{A_C,K'}$.

On peut montrer ([24]) que si V est de Hodge-Tate de type $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, alors $M_K^{\mathcal{G}}(V)$ est un espace vectoriel sur K de dimension $\leq \sum_{i=0}^{\infty} n_i$ et $L_{K'}^{\mathcal{G}}(V)$ est un espace vectoriel sur K' de dimension $\leq \sum_{i=1}^{\infty} n_i$.

[Rappelons ce que signifie " V est de Hodge-Tate de type $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ " : soit $\chi : \mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère qui donne l'action de $\mathcal{G}$ sur les racines de l'unité d'ordre une puissance de p (on a donc $g(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(g)}$, pour toute racine de l'unité ε d'ordre une puissance de p et pour tout $g \in \mathcal{G}$). On fait opérer $\mathcal{G}$ semi-linéairement sur $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ en posant $g(c \otimes v) = g(c) \otimes g(v)$, pour tout $g \in \mathcal{G}$, $c \in C$, $v \in V$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note V_C^i le sous-K'-espace vectoriel de V_C formé des x tels que $g(x) = \chi(g)^i x$, pour tout $g \in \mathcal{G}$. L'application évidente de $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (C \otimes_K V_C^i)$ dans V_C est alors injective (cf. [42] , p.122) et on dit que V est de Hodge-Tate si c'est un isomorphisme ; si l'on appelle n_i la dimension (nécessairement finie) de V_C^i sur K' , on dit, plus précisément, que V est de Hodge-Tate de type $(n_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.]

2. Soit alors $\mathcal{G}$ un groupe p-divisible sur A' , de dimension d et de hauteur h . On voit que $T(G)$ est un $\mathbb{Z}_p[\mathcal{G}]$-module, libre de rang h sur $\mathbb{Z}_p$ et que, par conséquent, $U_0(G) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T(G)$ est un $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-module, de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$. On sait (cf.[44] , §4,cor.2 au th.3) qu'il est de

Hodge-Tate de type $(n_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec

$$\begin{cases} n_0 = h-d \\ n_1 = d \\ n_i = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 0,1 \ . \end{cases}$$

Il résulte du théorème 1 que, si $(L_{K'}, M_K) = LM_{K'}(G)$, $U_0(G) = \underline{U}_0(G)(A_C)$ s'identifie, en tant que $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-module, au sous-module de $\mathrm{Hom}_{K[\underline{F},\underline{V}]}(M_K, BW(\mathrm{Res}(A_C))$ formé des u tels que $u_{K'}(L_{K'})$ est contenu dans le noyau de $bw_{A_C,K'}$. On en déduit, de manière évidente, des applications de M_K dans $M_K^{\mathcal{G}}(U_0(G))$ et de $L_{K'}$ dans $L_{K'}^{\mathcal{G}}(U_0(G))$ et on montre facilement qu'elles sont injectives. Le résultat précédent et des considérations sur les dimensions impliquent alors que ce sont des isomorphismes. On obtient ainsi un procédé pour construire le couple $LM_{K'}(G)$ à partir de la seule connaissance du $\mathbb{Q}_p[\mathcal{G}]$-module $U_0(G)$.

§ 2.- Travaux de Honda.

Dans ce paragraphe, on conserve les hypothèses et les notations du chapitre III et du § 1 du chapitre IV. On se propose de retrouver les résultats de Honda sur la classification des lois de groupe formel commutatif sur $A = W(k)$ et sur k en les interprétant à la lumière des résultats que nous avons obtenus.

2.1. Soit B un anneau commutatif. Rappelons que l'on appelle loi de groupe formel (sous-entendu commutatif) à d paramètres sur B , la donnée d'un d-uple de séries formelles $\Gamma(\underline{X},\underline{Y}) = (\Gamma_i(X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d))_{1\leq i\leq d}$, à coefficients dans B , en les $2d$ variables $X_1X_2,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d$, vérifiant, avec des notations évidentes

$$\begin{cases} \Gamma(\underline{X},0) = \Gamma(0,\underline{X}) = \underline{X} \ , \\ \Gamma(\Gamma(\underline{X},\underline{Y}),\underline{Z}) = \Gamma(\underline{X},\Gamma(\underline{Y},\underline{Z})) \\ \Gamma(\underline{Y},\underline{X}) = \Gamma(\underline{X},\underline{Y}) \ . \end{cases}$$

De ces axiomes, on déduit immédiatement l'existence d'un d-uple de séries formelles sans terme constant, à coefficients dans B , unique,

$h(\underline{X}) = (h_i(X_1,\ldots,X_d))_{1\leq i\leq d}$ tel que $\Gamma(\underline{X},h(\underline{X})) = \Gamma(h(\underline{X}),\underline{X}) = 0$.

Lorsque B est un anneau commutatif pseudo-compact, se donner une loi de groupe formel à d paramètres sur B revient à se donner une structure de bigèbre formelle sur le B-anneau profini $R = B[[X_1,X_2,\ldots,X_d]]$: l'anneau $R\hat{\otimes}_B R$ s'identifie à $B[[X_1,\ldots,X_d,Y_1,\ldots,Y_d]]$ en posant $X_i\hat{\otimes}1 = X_i$, $1\hat{\otimes}X_i = Y_i$ et le coproduit Δ est défini par $\Delta X_i = \Gamma_i(\underline{X},\underline{Y})$, l'augmentation par $\varepsilon(X_i) = 0$. On a ainsi associé à toute loi de groupe formel Γ sur B un groupe formel lisse et connexe, de dimension finie sur B , que nous notons G_Γ .

Si, de plus, B est local, on voit que, réciproquement, étant donné un groupe formel G lisse et connexe de dimension finie d sur B , d'algèbre affine R , le choix d'un système de coordonnées (i.e. le choix d'un d-uple $X_1,X_2,\ldots,X_d$ d'éléments de R relevant une base de $t_G^*(B)$ sur B) permet d'associer à G une loi de groupe formel à d paramètres sur B .

2.2. Pour tout anneau commutatif B et tout entier $d \geq 1$, nous notons $\Lambda^d(B) = B[[X_1,X_2,\ldots,X_d]]$ l'anneau des séries formelles en les d variables $X_1,X_2,\ldots,X_d$ à coefficients dans B . Si, pour tout $\underline{i} = (i_1,i_2,\ldots,i_d)$, on pose $\underline{X}^{\underline{i}} = X_1^{i_1}X_2^{i_2}\ldots X_d^{i_d}$, tout élément de $\Lambda^d(B)$ s'écrit, d'une manière et d'une seule, sous la forme $\sum_{\underline{i}\in\mathbb{N}^d} a_{\underline{i}}\underline{X}^{\underline{i}}$, avec les $a_{\underline{i}} \in B$. Nous notons $\Lambda_0^d(B)$ l'idéal de $\Lambda^d(B)$ formé des séries formelles sans terme constant.

Lorsque B est un anneau topologique, on munit $\Lambda^d(B)$ de la topologie produit ; l'idéal $\Lambda_0^d(B)$ est alors fermé dans $\Lambda^d(B)$.

On munit $A = W(k)$ et son corps des fractions K de la topologie p-adique et on note $K[[\underline{F}]]$ (resp. $A[[\underline{F}]]$) l'anneau topologique (avec la topologie produit) des séries formelles (non commutatives si $k \neq \mathbb{F}_p$) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i\underline{F}^i$, à coefficients dans K (resp. A), avec la règle $\underline{F}a = \sigma(a)\underline{F}$, pour tout $a\in K$ (resp. A). On voit que $A[[\underline{F}]]$ s'identifie au séparé complété du sous-anneau $A[\underline{F}]$ de $D_k = A[\underline{F},\underline{V}]$ pour la topologie $\underline{F}$-adique.

On peut munir le K-espace vectoriel topologique $\Lambda_0^d(K)$ d'une structure de $K[[\underline{F}]]$-module topologique à gauche en posant

$$\underline{F}(\sum a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}) = \sum \sigma(a_{\underline{i}})\underline{X}^{p\underline{i}} .$$

Avec les conventions du n° II.5.4, on voit que $\Lambda^d(A)$ est un A-anneau spécial et que (cf. n° II.5.5) $P(\Lambda^d(A))$ s'identifie au sous-A-module fermé de $\Lambda^d(K)$ formé des $\sum a_{\underline{i}}\underline{X}^{\underline{i}}$ tels que $i_j a_{\underline{i}} \in A$, pour tout $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ et pour $j = 1,2,\ldots,d$.

Nous notons $P(\Lambda_0^d(A))$ l'intersection de $P(\Lambda^d(A))$ avec $\Lambda_0^d(K)$. On voit que c'est un sous-$A[[\underline{F}]]$-module fermé de $\Lambda_0^d(K)$ qui contient lui-même $p\Lambda_0^d(A)$ comme sous-$A[[\underline{F}]]$-module fermé. En particulier le quotient $P(\Lambda_0^d(A))/p\Lambda_0^d(A)$ est muni d'une structure de $A[[\underline{F}]]$-module topologique.

Si l'on pose $\mathfrak{R} = \Lambda^d(A)$, on voit que l'anneau $\mathfrak{R}_k = \mathfrak{R}\otimes_A k = \mathfrak{R}/p\mathfrak{R}$ s'identifie à $\Lambda^d(k)$. On a défini au n° II.5.7 un isomorphisme de A-modules topologiques $w_{\mathfrak{R}} : \widehat{CW}_k(\mathfrak{R}_k) \to P(\mathfrak{R})/p\mathfrak{R}$, autrement dit

$$w_{\mathfrak{R}} : \widehat{CW}_k(\Lambda^d(k)) \to P(\Lambda^d(A))/p\Lambda^d(A) .$$

On voit tout de suite que la restriction de $w_{\mathfrak{R}}$ au sous-A-module fermé $\widehat{CW}_k(\Lambda_0^d(k))$, formé des covecteurs dont toutes les composantes sont des séries formelles sans terme constant, induit un isomorphisme

$$w^d : \widehat{CW}_k(\Lambda_0^d(k)) \to P(\Lambda_0^d(A))/p\Lambda_0^d(A) .$$

Il est clair que $\widehat{CW}_k(\Lambda_0^d(k))$ n'est autre que $\widehat{CW}_k^c(\Lambda^d(k))$ et que l'action de $\underline{F}$ sur ce module est topologiquement nilpotente. Ceci permet de considérer $\widehat{CW}_k(\Lambda_0^d(k))$ comme un $A[[\underline{F}]]$-module topologique et on vérifie facilement que w^d est, en fait, un isomorphisme de $A[[\underline{F}]]$-modules topologiques.

2.3. Soit Γ une loi de groupe formel à d paramètres sur A . Posons

$$\mathcal{MH}(\Gamma) = \{\alpha \in P(\Lambda^d(A)) \mid \alpha(\Gamma(\underline{X},\underline{Y}))-\alpha(\underline{X})-\alpha(\underline{Y}) \in p\Lambda^{2d}(A)\} ,$$

$$\mathcal{MH}_0(\Gamma) = \{\alpha \in P(\Lambda_0^d(A)) \mid \alpha(\Gamma(\underline{X},\underline{Y}))-\alpha(\underline{X})-\alpha(\underline{Y}) \in p\Lambda_0^{2d}(A)\} .$$

On voit que ce sont des sous-A-modules fermés de $P(\Lambda^d(A))$, que $\mathcal{MH}_0(\Gamma) = \mathcal{MH}(\Gamma) \cap P(\Lambda_0^d(A))$, que $\mathcal{MH}(\Gamma) = pA \oplus \mathcal{MH}_0(\Gamma)$ et que, avec les notations du n° IV.1.1, $\mathcal{MH}(\Gamma) = \mathcal{MH}(G_\Gamma)$.

Si l'on pose, en outre

$$\mathfrak{L}(\Gamma) = \{\alpha \in P(\Lambda^d(A)) \mid \alpha(\Gamma(\underline{X},\underline{Y})) = \alpha(\underline{X}) + \alpha(\underline{Y})\} ,$$

on voit que $\mathfrak{L}(\Gamma) \subset \mathcal{MH}_0(\Gamma)$ et que $\mathfrak{L}(\Gamma) = \mathfrak{L}(G_\Gamma)$.

De plus, il est clair que le quotient $MH(\Gamma) = \mathcal{MH}(\Gamma)/p\Lambda^d(A)$, qui n'est autre que $MH(G_\Gamma)$, s'identifie canoniquement à $\mathcal{MH}_0(\Gamma)/p\Lambda_0^d(A)$.

Comme G_Γ est connexe, $MH(\Gamma) = MH(G_\Gamma)$ peut être considéré comme un $A[[\underline{F}]]$-module à gauche. On voit tout de suite que $\mathcal{MH}_0(\Gamma)$ est un sous-$A[[\underline{F}]]$-module fermé de $P(\Lambda_0^d(A))$ et que la structure de $A[[\underline{F}]]$-module sur $MH(\Gamma)$ est la structure quotient.

Soit $\rho(\Gamma)$ l'application A-linéaire

$$\mathfrak{L}(\Gamma) \xrightarrow{\text{incl.}} \mathcal{MH}_0(\Gamma) \xrightarrow{\text{proj.can.}} MH(\Gamma) .$$

On sait (cf. remarque 2 du n° III.6.1) que se donner un D_k-module profini M sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective tel que $\dim_k M/\underline{F}M < +\infty$ revient à se donner un $A[[\underline{F}]]$-module à gauche de type fini sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective et qui vérifie $pM \subset \underline{F}M$. La catégorie Λ_A^c définie au n° IV.1.2 peut donc être considérée comme la catégorie dont les objets sont les triplets $(\mathfrak{L}, M, \rho)$

- où M est un $A[[\underline{F}]]$-module à gauche de type fini, avec action de $\underline{F}$ injective, tel que $pM \subset \underline{F}M$,
- où $\mathfrak{L}$ est un A-module libre de rang fini,
- où $\rho : \mathfrak{L} \to M$ est une application A-linéaire telle que l'application $\tilde{\rho} : \mathfrak{L}/p\mathfrak{L} \to M/\underline{F}M$ induite par ρ , par passage aux quotients, est un isomorphisme.

En paraphrasant les résultats du § 1 du chapitre IV, on voit alors que la correspondance $\Gamma \to \mathfrak{L}MH(\Gamma) = (\mathfrak{L}(\Gamma), MH(\Gamma), \rho(\Gamma))$ peut être considérée, de manière évidente, comme un foncteur contravariant additif de la catégorie des lois de groupe formel sur A dans Λ_A^c , qui induit une anti-équivalence entre ces deux catégories.

On voit, en outre, que $\mathcal{MH}(\Gamma)$ et $MH(\Gamma)$ ne dépendent que de la réduction Γ_k de Γ modulo p et que le foncteur, qui à Γ_k associe $MH(\Gamma_k) = MH(\Gamma)$ (où Γ est un relèvement arbitraire de Γ_k) , induit une anti-équivalence entre la catégorie des lois de groupe formel sur k et celle des $A[[\underline{F}]]$-modules à gauche, de type fini, avec action de $\underline{F}$ injective et

$pM \subset \underline{F}M$.

Ces résultats sont essentiellement, et au langage près, ceux de Honda ([32]) dans le cas particulier où la base est soit A soit k . Nous nous proposons, dans les n^{os} suivants, d'indiquer comment se construit le "dictionnaire"; cela revient, en fait, à expliquer comment on peut construire explicitement le triplet $\mathcal{L}MH(\Gamma)$ à partir de la connaissance du "logarithme" de Γ et vice-versa.

2.4. Pour tout entier $d \geq 1$, notons $\mathfrak{A}_d$ l'anneau des matrices carrées (d,d) à coefficients dans $A[[\underline{F}]]$. Avec des notations évidentes, toute matrice $u \in \mathfrak{A}_d$ peut s'écrire, d'une manière et d'une seule, sous la forme $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \underline{F}^\nu$, avec les C_ν des matrices carrées (d,d) à coefficients dans A . Avec Honda, disons qu'une matrice $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \underline{F}^\nu \in \mathfrak{A}_d$ est <u>spéciale</u> si $C_0 = p \cdot 1_d$ (où 1_d est la matrice unité).

Soit maintenant $(\mathcal{L}, M, \rho)$ un objet de Λ_A^c et soit $(\ell_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base de $\mathcal{L}$ sur A . Pour tout i , posons $\tilde{\ell}_i = \rho(\ell_i)$. Comme $\tilde{\rho}$ est un isomorphisme, les $\tilde{\ell}_i$ engendrent M comme $A[[\underline{F}]]$-module. Comme $pM \subset \underline{F}M$, on voit qu'il existe des éléments $a_{ij} \in A[[\underline{F}]]$ tels que, pour $1 \leq i \leq d$,

$$p \cdot \tilde{\ell}_i = \sum_{j=1}^{d} a_{ij} \underline{F} \tilde{\ell}_j \ .$$

Autrement dit, si l'on note $u \in \mathfrak{A}_d$ la matrice $p \cdot 1_d - (a_{ij})\underline{F}$, on voit que u est une matrice spéciale et que l'on a

$$u \cdot \tilde{\ell} = 0 \ ,$$

en notant $\tilde{\ell}$ la matrice colonne des $\tilde{\ell}_i$.

Cette matrice spéciale u n'est, bien sûr, pas uniquement déterminée. Outre le fait qu'elle dépend du choix d'une base de $\mathcal{L}$, on voit qu'elle est définie à multiplication à gauche par un élément de A_d de la forme $1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \underline{F}^\nu$ près.

Réciproquement, à toute matrice spéciale $u \in \mathfrak{A}_d$, on peut associer un objet $(\mathcal{L}, M, \rho)$ de Λ_A^c , muni d'une base de $\mathcal{L}$ sur A :

- on pose $\mathcal{L} = A^d$;
- si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique du $A[[\underline{F}]]$-module à gauche $(A[[\underline{F}]])^d$, et si u est la matrice des u_{ij} , on note M le quotient de $(A[[\underline{F}]])^d$ par le sous-$A[[\underline{F}]]$-module engendré par les $\sum_{j=1}^{d} u_{ij} e_j$, pour $1 \leq i \leq d$;
- si $(\ell_i)_{1 \leq i \leq d}$ est la base canonique de $\mathcal{L} = A^d$, l'application ρ est celle qui à ℓ_i associe l'image de e_i dans M .

2.5. Soit Γ une loi de groupe formel à d paramètres sur A et soit $(\mathcal{L}, M, \rho) = \mathcal{L}MH(\Gamma)$.

Il résulte facilement du n° 2.3 que, pour $i = 1,2,\dots,d$, il existe un élément $\ell_i \in \mathcal{L}$ et un seul tel que $\ell_i \equiv X_i \pmod{(\Lambda_0^d(K))^2}$ et que le d-uple $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d$ est une base de $\mathcal{L}$ sur A ; nous le notons ℓ_Γ et l'appelons <u>la base canonique de</u> $\mathcal{L}$ (Honda l'appelle le "<u>transformer</u>" de Γ). Il est commode de considérer ℓ_Γ comme le vecteur colonne

$$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_d \end{pmatrix}$$

et nous notons $\tilde{\ell}_\Gamma$ le vecteur colonne des $\tilde{\ell}_i = \rho(\ell_i)$.

Soit alors $u \in \mathfrak{A}_d$ une matrice spéciale telle que $u \cdot \tilde{\ell}_\Gamma = 0$. Pour $i = 1,2,\dots,d$, la i-ème composante du vecteur colonne $u \cdot \ell_\Gamma$ appartient au noyau de la projection de $P(\Lambda_0^d(A))$ sur $P(\Lambda_0^d(A))/p\Lambda_0^d(A)$ et est donc de la forme $p\alpha_i$, avec $\alpha_i \in \Lambda_0^d(A)$. Comme $u = p1_d + v\underline{F}$, avec $v \in \mathfrak{A}_d$, on voit que

$$\alpha_i \equiv X_i \pmod{(\Lambda_0^d(A))^2} \ .$$

Connaissant ℓ_Γ , on peut calculer explicitement une matrice spéciale u telle que $u \cdot \ell_\Gamma = 0$: on cherche u sous la forme $u = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \underline{F}^\nu$, avec les C_ν des matrices à coefficients dans A , et les C_ν se calculent de proche en proche : on a $C_0 = p \cdot 1_d$ et, si $C_0, C_1, \dots, C_{\nu-1}$ sont choisis, C_ν est le relèvement arbitraire d'une matrice à coefficients dans k qui est uniquement déterminée : soit ℓ'_i la i-ème composante du vecteur colonne $(C_0 + C_1\underline{F} + \dots + C_{\nu-1}\underline{F}^{\nu-1}) \cdot \ell_\Gamma$; on voit que $\ell'_i \in p\Lambda_0^d(A) + \underline{F}^\nu \Lambda_0^d(K)$ et que, pour toute matrice $C = (c_{ij})$, à coefficients dans A , la i-ème composante ℓ''_i de $(C_0 + C_1\underline{F} + \dots + C_{\nu-1}\underline{F}^{\nu-1} + C\underline{F}^\nu) \cdot \ell_\Gamma$ vérifie

$$\ell_i'' \equiv \ell_i' + \sum_{j=1}^{d} \sigma^{\nu}(c_{ij})X_j^{p^{\nu}} \pmod{(\Lambda_0^d(K))^{p^{\nu}+1}} \ ;$$

il doit donc exister des $c'_{ij} \in A$ tels que

$$\ell_i' \equiv \sum_{j=1}^{d} c'_{ij}X_j^{p^{\nu}} \pmod{p\Lambda_0^d(A) + (\Lambda_0^d(K))^{p^{\nu}+1}}$$

et la matrice $C_{\nu} = (c_{ij})$ est déterminée, modulo p, par

$$c_{ij} \equiv -\sigma^{-\nu}(c'_{ij}) \pmod{pA} \ , \ \text{pour} \ 1 \le i,j \le d \ .$$

2.6. Réciproquement, soit $(\mathcal{L},M,\rho)$ un objet de Λ_A^c. Choisissons une base $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_d$ de $\mathcal{L}$ sur A et soit $u \in \mathfrak{A}_d$ une matrice spéciale telle que, avec des notations évidentes, $u\cdot\tilde{\ell} = 0$. Si l'on veut que ℓ s'identifie à la base canonique ℓ_{Γ} du A-module $\mathcal{L}(\Gamma)$ d'une loi de groupe formel Γ définie sur A, telle que $(\mathcal{L},M,\rho)$ s'identifie à $\mathcal{L}MH(\Gamma)$, il résulte de ce qui précède qu'il doit exister un d-uple $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d$ d'éléments de $\Lambda_0^d(A)$, vérifiant $\alpha_i \equiv X_i \pmod{(\Lambda_0^d(A))^2}$ pour tout i, tel que, si on appelle α le vecteur colonne dont la i-ème composante est α_i, on ait

$$u\cdot\ell_{\Gamma} = p\alpha \ .$$

On voit que, pour α fixé, cette équation a une solution et une seule dans $(\Lambda_0^d(K))^d$ (la matrice u est inversible dans l'anneau des matrices carrées (d,d) à coefficients dans $K[[\underline{F}]]$ et on a $\ell_{\Gamma} = u^{-1}\cdot p\alpha = pu^{-1}\cdot\alpha$) et que cette solution est, en fait, un vecteur colonne dont les composantes sont à coefficients dans $P(\Lambda_0^d(A))$.

Il n'est alors pas difficile de vérifier, en utilisant les résultats rappelés au n° 2.2, que, pour toute base $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_d$ de $\mathcal{L}$ sur A, toute matrice spéciale $u \in \mathfrak{A}_d$ telle que $u\cdot\tilde{\ell} = 0$, tout d-uple $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d$ d'éléments de $\Lambda_0^d(A)$ satisfaisant $\alpha_i \equiv X_i \pmod{(\Lambda_0^d(A))^2}$, si l'on pose $\ell_{\Gamma} = pu^{-1}\cdot\alpha$, l'unique d-uple $\Gamma(\underline{X},\underline{Y})$ de séries formelles sans terme constant, à coefficients dans K, vérifiant $\ell_{\Gamma}(\Gamma(\underline{X},\underline{Y})) = \ell_{\Gamma}(\underline{X}) + \ell_{\Gamma}(\underline{Y})$, est une loi de groupe formel définie sur A (i.e. les coefficients de Γ sont, en fait, dans A) telle que $\mathcal{L}MH(\Gamma)$ s'identifie à $(\mathcal{L},M,\rho)$. On vérifie en outre qu'en faisant varier la base $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_d$, la matrice u et le d-uple α, on obtient toutes les lois de groupe formel définies sur A telles que $\mathcal{L}MH(\Gamma) \simeq (\mathcal{L},M,\rho)$ (en fait il suffit de faire varier la base et, la base étant choisie, soit de fixer u et

faire varier α, soit de fixer α et de faire varier u).

Tous les résultats que nous avons obtenus sur les groupes formels lisses et connexes, de dimension finie, sur A ou sur k, peuvent alors se traduire en termes de matrices spéciales : on retrouve ainsi les énoncés de Honda.

<u>Remarque</u> : Honda travaille, en fait, dans un cadre plus général : la base $\mathfrak{D}$ est l'anneau des entiers d'un corps de caractéristique 0 muni d'une valuation discrète, à corps résiduel k de caractéristique $p \neq 0$. Honda suppose donné, en outre, un endomorphisme τ de $\mathfrak{D}$ induisant, par réduction modulo l'idéal maximal, un endomorphisme $\tilde{\tau}$ de k qui est une puissance strictement positive du Frobenius absolu. Honda construit alors une famille de lois de groupe formel définies sur $\mathfrak{D}$; il montre que, lorsque p est une uniformisante de $\mathfrak{D}$ et $\tilde{\tau}$ est le Frobenius absolu, il obtient ainsi toutes les lois de groupes formels définies sur $\mathfrak{D}$. Lorsque $\mathfrak{D}$ est complet et k parfait, L. Cox (dans le cas de dimension 1, cf. [9] et [10]) et J.M. Decauwert (dans le cas général, cf. [11] et [12]) ont montré que les lois de groupe formel construites par Honda sont exactement celles qui, après une éventuelle extension non ramifiée des scalaires, peuvent être munies d'une structure de A-module formel, où A est un sous-anneau de $\mathfrak{D}$ tel que l'extension $\mathfrak{D}/A$ est non ramifiée. Decauwert explique en outre comment ces constructions peuvent s'interpréter en termes de modules de Dieudonné.

§ 3.- <u>Théorie de Cartier</u> (<u>courbes typiques</u>)

Dans ce paragraphe, les hypothèses et les notations sont celles du chapitre III.

3.1. Appelons D_k-<u>module à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) <u>de type</u> ℓcf tout D_k-module à gauche (resp. à droite) M séparé et complet pour la topologie $\underline{F}$-adique sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective et qui est tel que $M/\underline{F}M$ (resp. $M/M\underline{F}$) est de dimension finie sur k.

Les D_k-modules à gauche (resp. à droite) de type ℓcf forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des D_k-modules topologiques à gauche (resp. à droite). On sait (prop. 6.1 du chap. III) que le foncteur $\underline{M}$ induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes formels lisses et connexes de dimension finie sur k et celle des D_k-modules à gauche de type ℓcf .

Nous nous proposons de construire une dualité entre D_k-modules à gauche de type ℓcf et D_k-modules à droite de type ℓcf .

3.2. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $B_n = p^{-n}A/A$, et considérons le A-module $\Theta_k^{\ell c} = \prod_{n\geq 1} B_n$. Avec des notations évidentes, tout élément de $\Theta_k^{\ell c}$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{n\geq 1} b_n T'_n$, avec $b_n \in p^{-n}A/A$.

Posons en outre $T'_0 = 0$. On munit $\Theta_k^{\ell c}$ d'une structure de D_k-bimodule en posant

$$\begin{cases} \lambda(\sum b_n T'_n) = \sum \lambda b_n T'_n \text{ , pour tout } \lambda \in A \text{ ,} \\ \underline{F}(\sum b_n T'_n) = \sum \sigma(b_n) T'_{n+1} \text{ ,} \\ \underline{V}(\sum b_n T'_n) = \sum p\sigma^{-1}(b_n) T'_{n-1} \text{ ,} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\sum b_n T'_n)\lambda = \sum \sigma^n(\lambda) b_n T'_n \text{ , pour tout } \lambda \in A \text{ ,} \\ (\sum b_n T'_n)\underline{F} = \sum b_n T'_{n+1} \text{ ,} \\ (\sum b_n T'_n)\underline{V} = \sum p b_n T'_{n-1} \text{ .} \end{cases}$$

Il est clair que $\Theta_k^{\ell c}$ est un D_k-module à gauche (resp. à droite) séparé et complet pour la topologie $\underline{F}$-adique, sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective.

Pour tout D_k-module à gauche M de type ℓcf , notons $M^\vee = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}g}(M, \Theta_k^{\ell c})$ le D_k-module à droite des applications D_k-linéaires à gauche continues de M dans $\Theta_k^{\ell c}$; on voit que $M^\vee$ est un D_k-module à droite, séparé et complet pour la topologie $\underline{F}$-adique, sur lequel l'action de $\underline{F}$ est injective. Il est clair que la correspondance $M \mapsto M^\vee$ est, de manière évidente, un foncteur contravariant additif.

On définit de la même manière un foncteur contravariant additif de la catégorie des D_k-modules à droite de type ℓcf dans celle des D_k-modules à gauche, séparés et complets pour la topologie $\underline{F}$-adique, avec action de $\underline{F}$ injective : à N on associe $N^\wedge = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}d}(N, \Theta_k^{\ell c})$.

PROPOSITION 3.1.-

i) <u>Si</u> M (<u>resp</u>. N) <u>est un</u> D_k-<u>module à gauche</u> (<u>resp</u>. <u>à droite</u>) <u>de type</u> ℓcf , $M^\vee$ (<u>resp</u>. $N^\wedge$) <u>est un</u> D_k-<u>module à droite</u> (<u>resp</u>. <u>à gauche</u>) <u>de type</u> ℓcf .

ii) <u>Le foncteur</u> $M \mapsto M^\vee$ <u>induit une anti-équivalence entre</u> D_k-<u>modules à gauche de type</u> ℓcf <u>et</u> D_k-<u>modules à droite de type</u> ℓcf <u>et le foncteur</u> $N \mapsto N^\wedge$ <u>est un quasi-inverse</u>.

<u>Démonstration</u> : on a défini au n° III.5.2 le D_k-bimodule ΘT_k formé des éléments de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T_n$, avec

$$a_n \begin{cases} \in K/A & \text{si } n < 0 \\ \in K/p^{-n}A & \text{si } n \geq 0 \text{ .} \end{cases}$$

Pour tout entier $r \geq 0$, soit $\Theta T_{k,r}$ le sous-D_k-bimodule de ΘT_k formé des $\sum a_n T_n$ vérifiant

$$a_n \begin{cases} = 0 & \text{si } n \leq -r \\ \in p^{-n-r}A/A & \text{si } -r < n \leq 0 \\ \in p^{-n-r}A/p^{-n}A & \text{si } n > 0 \text{ .} \end{cases}$$

Notons $\Theta T_k^{(r)}$ le D_k-bimodule qui

- en tant que D_k-module à gauche est $\Theta T_{k,r}$,
- en tant que D_k-module à droite est le module déduit de $\Theta T_{k,r}$ par l'extension des scalaires σ^r .

Autrement dit, $\Theta T_k^{(r)}$ s'identifie en tant qu'ensemble à $\Theta T_{k,r}$; l'action de D_k à gauche est la même et celle de D_k à droite est définie par, pour tout $\sum a_n T_n \in \Theta T_k^{(r)}$,

$$\begin{cases} (\sum a_n T_n)\lambda = \sum \sigma^{n-r}(\lambda) a_n T_n \text{ , pour tout } \lambda \in A \text{ ,} \\ (\sum a_n T_n)\underline{F} = \sum a_n T_{n+1} \\ (\sum a_n T_n)\underline{V} = \sum p a_n T_{n-1} \text{ .} \end{cases}$$

On voit tout de suite que l'application $\eta_r : \Theta T_k^{(r+1)} \to \Theta T_k^{(r)}$, qui à $\sum a_n T_n$ associe $\sum a_n T_{n+1}$, est D_k-linéaire à gauche et à droite, surjective ; son noyau est formé des $a \in \Theta T_k^{(r+1)}$ tels que $\underline{F}a = 0$, ce qui équivaut à $a\underline{F} = 0$.

On voit aussi que l'application $\eta^{(r)} : \Theta_k^{\ell c} \to \Theta T_k^{(r)}$, qui à $\sum_{n=1}^{\infty} b_n T'_n$ associe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n T_{n-r}$, est D_k-linéaire à gauche et à droite, surjective ; son noyau est $\underline{F}^r \Theta_k^{\ell c} = \Theta_k^{\ell c} \underline{F}^r$. Comme, en outre, $\eta_r \circ \eta^{(r+1)} = \eta^{(r)}$, $\Theta_k^{\ell c}$ s'identifie à $\varprojlim \Theta T_k^{(r)}$ en tant que D_k-module topologique, à gauche aussi bien qu'à droite (la topologie étant la topologie $\underline{F}$-adique sur $\Theta_k^{\ell c}$ et la topologie de la limite projective, avec topologie discrète sur les quotients, sur $\varprojlim \Theta T_k^{(r)}$). Dans cette identification, $\Theta T_k^{(r)}$ est le conoyau de $\underline{F}^r$ dans $\Theta_k^{\ell c}$ (comme module à gauche aussi bien qu'à droite).

Soit alors M un D_k-module, par exemple à gauche, de type ℓcf . On a $M^{\vee} = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}g}(M, \Theta_k^{\ell c}) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}g}(M, \varprojlim \Theta T_k^{(r)}) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M, \Theta T_k^{(r)}) =$
$= \varprojlim \mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M/\underline{F}^r M, \Theta T_k^{(r)})$.

Pour tout D_k-module à gauche L , notons $L^{(-r)}$ le D_k-module à gauche déduit de L par l'extension des scalaires σ^{-r} (on convient en outre d'identifier L et $L^{(-r)}$ comme $\mathbb{Z}_p[\underline{F},\underline{V}]$-modules en posant $a = 1 \otimes a$) . Soit $\nu_r : \Theta T_k^{(r)} \to \Theta T_{k,r}$ l'application qui à $\sum a_n T_n$ associe $\sum \sigma^r(a_n) T_n$. On vérifie immédiatement que, pour tout D_k-module à gauche L , l'application qui à $\varphi \in \mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(L, \Theta T_k^{(r)})$ associe $\nu_r \circ \varphi$ définit un isomorphisme du D_k-module à droite $\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(L, \Theta T_k^{(r)})$ sur $\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(L^{(-r)}, \Theta T_{k,r})$.

On peut donc identifier $\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M/\underline{F}^r M, \Theta T_k^{(r)})$ à

$$\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}((M/\underline{F}^r M)^{(-r)}, \Theta T_{k,r}) = \mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)}, \Theta T_{k,r}) .$$

Comme il est clair que $\Theta T_{k,r}$ est le noyau de $\underline{F}^r$ dans ΘT_k , considéré comme D_k-module à gauche, on a aussi

$$\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M/\underline{F}^r M, \Theta T_k^{(r)}) = \mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)}, \Theta T_k) .$$

Autrement dit, avec les conventions du n° III.5.2, $\mathrm{Hom}_{D_k\text{-}g}(M/\underline{F}^r M, \Theta T_k^{(r)})$ s'identifie canoniquement au dual $(M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)})^*$ du D_k-module à gauche fini $M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)}$. On a donc $M = \varprojlim (M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)})^*$ et il est facile de voir quelle est l'application de transition

$$f_r^* : (M^{(-r-1)}/\underline{F}^{r+1} M^{(-r-1)})^* \longrightarrow (M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)})^* :$$

le Frobenius $\underline{F}$ définit une application D_k-linéaire à gauche de $M^{(-r)}$ dans

$M^{(-r-1)}$ qui induit, par passage aux quotients, une application D_k-linéaire à gauche

$$f_r : M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)} \longrightarrow M^{(-r-1)}/\underline{F}^{r+1} M^{(-r-1)} ,$$

et f_r^* est la flèche duale. En particulier, comme l'action de $\underline{F}$ sur M est injective, f_r est injective et f_r^* est surjective.

On en déduit immédiatement que $(M^{(-r)}/\underline{F}^r M^{(-r)})^*$ s'identifie à $M^{\vee}/M^{\vee}\underline{F}^r$ et la proposition résulte facilement de la dualité entre D_k-modules finis à gauche et D_k-modules finis à droite définie par le foncteur $L \mapsto L^*$ (prop. 5.2 du chap. III).

3.3. Pour tout anneau commutatif R , nous notons $\Lambda(R) = R[[T]]$ l'anneau des séries formelles en une variable à coefficients dans R .

Soit G un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k . Avec Cartier ([7]), nous appelons <u>courbe de</u> G tout élément du groupe topologique $G(\Lambda(k)) = G(k[[T]]) = \varprojlim G(k[T]/T^n)$ et nous notons $C(G)$ le groupe des courbes. Comme l'a remarqué Cartier, ce groupe est muni des endomorphismes suivants :

a) pour tout $x \in k$, on note $\langle x \rangle$ l'endomorphisme de $C(G)$ induit par l'unique endomorphisme du k-anneau profini $\Lambda(k)$ qui envoie T sur xT ;

b) pour tout entier $n \geq 1$, on note V_n l'endomorphisme de $C(G)$ induit par l'endomorphisme de $\Lambda(k)$ qui envoie T sur T^n ;

c) pour tout entier $n \geq 1$, notons $T_1, T_2, \ldots, T_n$ les n racines (distinctes ou non) du polynôme $X^n - T$ dans une clôture algébrique du corps des fractions de $\Lambda(k)$ et $\Lambda^{(n)}(k)$ le k-anneau profini $\Lambda(k)[T_1, T_2, \ldots, T_n]$; pour $1 \leq i \leq n$, soit ρ_i l'homomorphisme de $C(G)$ dans $G(\Lambda^{(n)}(k))$ induit par l'homomorphisme du k-anneau profini $\Lambda(k)$ dans $\Lambda^{(n)}(k)$ qui envoie T sur T_i ; on vérifie facilement que, pour tout $\varphi \in C(G)$, $\sum_{i=1}^{n} \rho_i \varphi$ provient d'un élément de $C(G)$ et d'un seul (par l'homomorphisme induit par l'inclusion de $\Lambda(k)$ dans $\Lambda^{(n)}(k)$) ; nous notons $F_n \varphi$ cet élément.

Une courbe $\varphi \in C(G)$ est dite <u>typique</u> si $F_n \varphi = 0$, pour tout entier n

premier à p. Il est clair que l'ensemble $CT(G)$ des courbes typiques de G est un sous-groupe fermé de $C(G)$ stable par les opérateurs $\langle x\rangle$, pour $x \in k$, F_p et V_p. On voit aussi que l'on peut considérer CT, de manière évidente, comme un foncteur additif de la catégorie des groupes formels lisses et connexes, de dimension finie sur k, dans celle des groupes abéliens topologiques, munis d'endomorphismes $\langle x\rangle$, pour $x \in k$, F_p et V_p.

Remarque : on évitera de confondre les groupes $C(G)$ et $CT(G)$ définis ici lorsque G est un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k avec les groupes notés de la même manière définis au n° III.5.1 lorsque G est un p-groupe fini sur k.

3.4. Pour tout D_k-module à gauche M, notons $M^{(1)}$ le D_k-module à gauche déduit de M par l'extension des scalaires σ (cf. n° IV.3.1). Si R est un k-anneau fini ou profini, on pose $\widehat{CW}_k^{(1)}(R) = (\widehat{CW}_k(R))^{(1)}$. Rappelons (id.) que tout élément de $\widehat{CW}_k^{(1)}(R)$ peut s'écrire comme un covecteur $(\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-2},a_{-1})$ dont les composantes sont des éléments de R indexés par les entiers ≤ -1. L'application v_R qui à $\underline{a} = (\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-1},a_0) \in CW_k(R)$ associe $(\ldots,a_{-n},\ldots,a_{-2},a_{-1}) \in \widehat{CW}_k^{(1)}(R)$ est une application D_k-linéaire surjective de $\widehat{CW}_k(R)$ sur $\widehat{CW}_k^{(1)}(R)$ dont le noyau est le noyau de $\underline{V}$ dans $\widehat{CW}_k(R)$.

Soit $A = W(k)$ et soit $\mathfrak{S} = \Lambda(A) = A[[T]]$; on a donc

$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}/p\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \otimes_A k = k[[T]] = \Lambda(k) .$$

On a défini (cf. prop. 5.5 du chap.II) un isomorphisme $w_{\mathfrak{S}} : \widehat{CW}_k(\mathfrak{S}_k) \to P(\mathfrak{S})/p\mathfrak{S}$. On voit que l'image par $w_{\mathfrak{S}}$ du noyau de $\underline{V}$ dans $\widehat{CW}_k(\mathfrak{S}_k)$ est $\mathfrak{S}/p\mathfrak{S}$. On déduit donc de $w_{\mathfrak{S}}$, par passage aux quotients, un isomorphisme

$$w_{\mathfrak{S}}^{(1)} : \widehat{CW}_k^{(1)}(\mathfrak{S}_k) \longrightarrow P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S} .$$

Soit maintenant G un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k, et soit $M = \underline{M}(G)$. On sait (cf. th.1 du chap. III) que, pour tout k-anneau fini R, le groupe $G(R)$ s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, au groupe $\mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M,\widehat{CW}_k(R))$; il est clair que ce dernier groupe est canoniquement isomorphe au groupe $\mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M^{(1)},\widehat{CW}_k^{(1)}(R))$. Par passage à la limite, on voit que $C(G) = G(k[[T]])$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M^{(1)},\widehat{CW}_k^{(1)}(k[[T]]))$.

Finalement, l'application $w_{\mathfrak{S}}^{(1)}$ permet d'identifier le groupe $C(G)$ au groupe $\mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M^{(1)},P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})$ (en munissant le A-module topologique $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ de la structure de D_k-module topologique déduite de celle de $\widehat{CW}_k^{(1)}(k[[T]])$ par transport de structure).

On voit (cf. n° II.5.5) que $P(\mathfrak{S})$ est formé des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i$, avec les $a_i \in K$ vérifiant $ia_i \in A$, pour tout i. Avec des notations évidentes, $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ est le A-module formé des éléments de la forme $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \tilde{T}^i$, avec $a_0 \in K/A$ et $a_i \in i^{-1}A/A$, pour $i \geq 1$. On voit facilement que l'action de $\underline{F}$ et $\underline{V}$ sur $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ est définie par

$$\begin{cases} \underline{F}(\sum a_i\tilde{T}^i) = \sum \sigma(a_i)\tilde{T}^{ip} \\ \underline{V}(\sum a_i\tilde{T}^i) = \sum p\sigma^{-1}(a_{ip})\tilde{T}^i . \end{cases}$$

Considérons les endomorphismes suivants du A-module $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$:

a) pour tout $x \in k$, soit $\nu_x(\sum a_i\tilde{T}^i) = \sum [x]^i a_i \tilde{T}^i$ (où $[x]$ est le représentant multiplicatif de x dans $A = W(k)$) ;

b) pour tout entier $n \geq 1$, soit $v_n(\sum a_i\tilde{T}^i) = \sum a_i \tilde{T}^{ni}$;

c) pour tout entier $n \geq 1$, soit $f_n(\sum a_i\tilde{T}^i) = \sum na_{in}\tilde{T}^i$.

On vérifie facilement que, lorsque l'on identifie $C(G)$ à $\mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M^{(1)},P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})$, on a, pour tout $u \in C(G)$,

$$(1) \quad \begin{cases} \langle x\rangle u = \nu_x \circ u , & \text{pour tout } x \in k , \\ V_n u = v_n \circ u & \text{, pour tout entier } n \geq 1 , \\ F_n u = f_n \circ u & \text{, pour tout entier } n \geq 1 . \end{cases}$$

D'autre part, il est immédiat que l'application, qui à $\sum_{n=1}^{\infty} b_n T_n' \in \Theta_k^{\ell c}$ associe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tilde{T}^{p^n} \in P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$, est D_k-linéaire à gauche, injective. Nous l'utilisons pour identifier $\Theta_k^{\ell c}$ à un sous-D_k-module à gauche de $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$.

Les formules (1) montrent que si $u \in \mathrm{Hom}_{D_k}^{\mathrm{cont}}(M^{(1)},P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S})$ et si $n \geq 1$, on a $F_n u = 0$ si et seulement si l'image de u est contenue dans le sous-A-module de $P(\mathfrak{S})/\mathfrak{S}$ formé des $\sum a_i\tilde{T}^i$ tels que $a_{in} = 0$, pour tout $i \geq 0$. Si l'on veut que cette condition soit satisfaite pour tout entier n premier à p, on doit avoir $a_i = 0$ si i n'est pas une puissance de p et on en déduit qu'un élément $u \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(M^{(1)}, P(\mathcal{S})/\mathcal{S})$ est une courbe typique si et seulement si l'image par u de $M^{(1)}$ est contenue dans $\Theta_k^{\ell c}$. On a donc démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2.- Soit G un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k. Le groupe $C(G)$ (resp. $CT(G)$) s'identifie, canoniquement et fonctoriellement en G, au groupe $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k}(\underline{M}^{(1)}(G), P(\mathcal{S})/\mathcal{S})$ (resp. $(\underline{M}^{(1)}(G))^{\vee} = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}g}(\underline{M}^{(1)}(G), \Theta_k^{\ell c})$) (on a posé $\underline{M}^{(1)}(G) = (\underline{M}(G))^{(1)}$).

3.5. Rappelons que tout D_k-module à droite L peut être muni d'une structure de D_k-module à gauche en posant, pour tout $a \in L$,

$$\begin{cases} \lambda a = a\lambda \quad , \text{ pour tout } \lambda \in A , \\ \underline{F}a = a\underline{V} \quad , \\ \underline{V}a = a\underline{F} \quad . \end{cases}$$

Nous appelons cette structure la structure de D_k-module à gauche induite par la structure de D_k-module à droite.

PROPOSITION 3.3.- Soit G un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k et soit $M^{(1)} = \underline{M}^{(1)}(G)$.

i) il existe sur le groupe topologique $CT(G)$ une structure de D_k-module topologique à gauche et une seule telle que, pour tout $\varphi \in CT(G)$,

$$\begin{cases} [x]\varphi = \langle x \rangle \varphi \ , \text{ pour tout } x \in k \ , \\ \underline{F}\varphi = F_p\varphi \text{ et } \underline{V}\varphi = V_p\varphi \ , \end{cases}$$

ii) lorsque l'on identifie $CT(G)$ au groupe $(M^{(1)})^{\vee} = \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{D_k\text{-}g}(M^{(1)}, \Theta_k^{\ell c})$, cette structure de D_k-module à gauche est celle qui est induite par la structure de D_k-module à droite de $(M^{(1)})^{\vee}$.

Démonstration : il est clair que, s'il existe une structure de D_k-module topologique à gauche sur $CT(G)$ vérifiant les conditions requises en (i), celle-ci est unique. Il suffit donc, pour démontrer la proposition, de vérifier que $CT(G)$, muni de la structure de D_k-module à gauche induite par la structure de D_k-module à droite de $(M^{(1)})^{\vee}$ vérifie bien ces conditions ; autrement dit que, pour tout $u : M^{(1)} \to \Theta_k^{\ell c}$ et tout $a \in M^{(1)}$, on a

$$\begin{cases} (\langle x \rangle u)(a) = u(a).[x] \quad , \text{ pour tout } x \in k \ , \\ (V_p u)(a) = u(a).\underline{F} \quad , \\ (F_p u)(a) = u(a).\underline{V} \quad , \end{cases}$$

ce qui se fait facilement à l'aide des formules (1).

Cette proposition nous permet de retrouver le résultat suivant dû à Cartier ([7]) :

COROLLAIRE. - Appelons D_k-module à gauche de type "dual de ℓcf" tout D_k-module à gauche L, séparé et complet pour la topologie $\underline{V}$-adique, sur lequel l'action de $\underline{V}$ est injective, tel que $L/\underline{V}L$ est de dimension finie sur k. Alors,

i) si G est un groupe formel lisse et connexe de dimension finie sur k, $CT(G)$ est un D_k-module à gauche de type "dual de ℓcf" ;

ii) le foncteur $G \mapsto CT(G)$ induit une équivalence entre la catégorie des groupes formels lisses et connexes de dimension finie sur k et celle des D_k-modules à gauche de type "dual de ℓcf".

En effet, CT s'identifie au composé des foncteurs $G \mapsto \underline{M}(G)$, $M \mapsto M^{(1)}$, $N \mapsto N^{\vee}$. Le premier induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes formels lisses et connexes, de dimension finie sur k, et celle des D_k-modules à gauche de type ℓcf (prop. 6.1 du chap. III). Le second induit visiblement une équivalence de la catégorie des D_k-modules à gauche de type ℓcf sur elle-même. Le troisième induit une anti-équivalence entre D_k-modules à gauche de type ℓcf et D_k-modules à droite de type ℓcf. Enfin, il est clair que, si L est un D_k-module à droite, alors L, muni de la structure de D_k-module à gauche induite, est de type "dual de ℓcf" si et seulement si L est un D_k-module à droite de type ℓcf.

Remarque : on peut aussi déduire très facilement des constructions qui précèdent le fait (dû à Cartier) que tout élément de $C(G)$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{n \in I(p)} V_n \gamma_n$, avec $\gamma_n \in CT(G)$ (et où $I(p)$ est l'ensemble des entiers > 0 premiers à p).

3.6. Lorsque l'on se restreint aux D_k-modules à gauche de type ℓcf qui sont libres de rang fini sur A (i.e. aux modules de Dieudonné des groupes p-divisibles connexes sur k), on peut donner une description plus simple de la dualité $M \to M^\vee$.

Soit, en effet, M un D_k-module à gauche, libre de rang fini sur A . Rappelons (cf. n° III.6.3) que l'on peut munir le A-module M^d des applications A-linéaires de M dans A d'une structure de D_k-module à gauche, en posant, pour tout $u \in M^d$ et tout $a \in M$,

$$(\underline{F}u)(a) = \sigma(u(\underline{V}a)) \quad \text{et} \quad (\underline{V}u)(a) = \sigma^{-1}(u(\underline{F}a)) ,$$

et que la correspondance $M \mapsto M^d$ définit une dualité dans la catégorie des D_k-modules à gauche qui sont des A-modules libres de rang fini.

PROPOSITION 3.4.- *Les restrictions des foncteurs* $M \mapsto M^d$ *et* $M \mapsto M^\vee$ *à la catégorie des* D_k*-modules à gauche qui sont simultanément libres de rang fini sur* A *et de type* ℓcf *sont naturellement équivalentes* (*on a muni* $M^\vee$ *de sa structure de* D_k*-module à gauche induite par sa structure de* D_k*-module à droite*).

Démonstration : soit M un D_k-module à gauche de type ℓcf , libre de rang fini sur A . Pour tout $u \in M^d$, soit $\rho_M(u) : M \to \mathbb{O}_k^{\ell c}$ l'application définie par

$$\rho_M(u)(a) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{-n}\sigma^n(u(\underline{V}^n a))T'_n .$$

On vérifie facilement que $\rho_M(u)$ est D_k-linéaire à gauche, donc que, pour tout $u \in M^d$, $\rho_M(u) \in M^\vee$.

On vérifie aussi que $\rho_M : M^d \to M^\vee$ est D_k-linéaire à gauche, i.e. qu'elle est additive et que, pour tout $u \in M^d$, tout $a \in M$,

$$\begin{cases} \rho_M(\lambda u)(a) = \rho_M(u)(a).\lambda , & \text{pour tout } \lambda \in A , \\ \rho_M(\underline{V}u)(a) = \rho_M(u)(a).\underline{F} , & \\ \rho_M(\underline{F}u)(a) = \rho_M(u)(a).\underline{V} . & \end{cases}$$

Il est clair que ρ_M est fonctorielle en M et il suffit donc pour démontrer la proposition de vérifier que ρ_M est bijective. Sur M la topologie $\underline{F}$-adique et la topologie p-adique coïncident et il existe donc un entier $r \geq 1$ tel que $\underline{F}^r M \subset pM$, ce qui implique $F^{rm}M \subset p^m M$, pour tout entier $m \geq 1$.

Soit $u \in \operatorname{Ker} \rho_M$. On voit que, pour tout $a \in M$, $u(\underline{V}^n a) \in p^n A$, donc

que $u(\underline{V}^n M) \subset p^n A$, pour tout entier $n \geq 0$. Comme $\underline{F}^{rm} M \subset p^m M$ implique $p^{rm} M = \underline{V}^{rm}\underline{F}^{rm} M \subset p^m \underline{V}^{rm} M$, on a, pour tout entier $m \geq 0$, $p^{rm}u(M) = u(p^{rm}M) \subset p^m u(\underline{V}^{rm}M) \subset p^{m+rm}A$, donc $u(M) \subset p^m A$; comme ceci est vrai pour tout m on a $u = 0$ et ρ_M est bien injective.

Pour tout $a \in M$, notons a_m l'unique élément de M tel que $\underline{F}^{rm} a = p^m a_m$. Soit u' un élément quelconque de $M^\vee$. Pour tout a fixé dans M , on voit que l'on peut écrire

$$u'(a_m) = \sum p^{-n}\sigma^n(b_{n,m})T'_n ,$$

où $b_{n,m} \in A$ et est uniquement déterminé modulo p^n . En écrivant que $\underline{F}^{rm} a = p^m a_m$, on montre facilement que $p^{(1-r)m} b_{rm,m} \in A$. En écrivant que $\underline{F}^r a_m = p a_{m+1}$, on vérifie que

$$p^{-rm} b_{rm,m} \equiv p^{-r(m+1)+1} b_{r(m+1),m+1} \pmod{A} .$$

On en déduit que la suite des $p^{(1-r)m} b_{rm,m}$ converge vers un élément $u(a) \in A$. Il n'y a alors pas de difficulté à vérifier que l'application $a \to u(a)$ de M dans A est A-linéaire, donc que $u \in M^d$ et que $\rho_M(u) = u'$, d'où la surjectivité.

COROLLAIRE.- *Soit* G *un groupe* p-*divisible connexe sur* k *et soit* $\mathbb{D}_p(G)$ *son dual. Les* D_k*-modules à gauche* $CT(G)$ *et* $\underline{M}^{(1)}(\mathbb{D}_p(G))$ *sont isomorphes, canoniquement et fonctoriellement en* G .

En effet, $CT(G)$ est canoniquement isomorphe à $(\underline{M}^{(1)}(G))^\vee$ (prop. 4.2), $(\underline{M}^{(1)}(G))^\vee$ s'identifie à $(\underline{M}^{(1)}(G))^d$ d'après la proposition précédente, on voit tout de suite que $(\underline{M}^{(1)}(G))^d$ s'identifie à $(\underline{M}(G)^d)^{(1)}$, et $\underline{M}(G)^d$ s'identifie à $\underline{M}(\mathbb{D}_p(G))$ d'après la proposition 6.4 du chap. III, donc $(\underline{M}(G)^d)^{(1)}$ s'identifie à $\underline{M}(\mathbb{D}_p(G))^{(1)} = \underline{M}^{(1)}(\mathbb{D}_p(G))$.

3.7. *Remarques* :

1.- Si G est un p-groupe formel sur k , la connaissance de $\underline{M}(G)$ est équivalente à celle de $(\underline{M}(G))^{(1)} = \underline{M}^{(1)}(G)$ (et on prendra garde que, suivant les auteurs, ce qui est appelé "module de Dieudonné de G" s'identifie soit à $\underline{M}(G)$, soit à $\underline{M}^{(1)}(G)$). On peut se demander s'il est plus commode de travailler avec $\underline{M}(G)$ ou avec $\underline{M}^{(1)}(G)$. Du point de vue adopté dans ce mémoire, on voit que cela est indifférent lorsque l'on travaille sur k , mais qu'il est plus commode de travailler avec $\underline{M}(G)$ lorsque l'on étudie les relèvements de G sur $W(k)$.

On a vu que, pour interpréter les résultats de Honda c'est $\underline{M}(G)$ qui convient le mieux, alors que pour ceux de Cartier c'est $\underline{M}^{(1)}(G)$ qui est le plus naturel.

Lorsque l'on veut relier nos résultats à la cohomologie de de Rham (à la manière de Oda, [41] , ou de Mazur-Messing, [38] , chap. I, § 4, via les extensions universelles), on s'aperçoit que c'est $\underline{M}^{(1)}(G)$ le plus naturel.

2.- Lorsque l'on veut relier nos constructions à l'étude des extensions universelles des groupes p-divisibles, les résultats s'énoncent plus commodément avec $\underline{M}^{(1)}(G)$, mais, pour les obtenir, on travaille simultanément avec $\underline{M}^{(1)}(G)$ et $\underline{M}(G)$: soit B un anneau qui est soit k , soit A' (anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée, de degré e , du corps des fractions K de $A = W(k)$), soit A'/m^{ν} (où m^{ν} est une puissance non nulle de l'idéal maximal m de A'). Soit $\widehat{CW}_B$ le B-groupe formel défini par restriction de CW aux B-anneaux finis (cf. n° II.4.1). On déduit facilement du § 2 du chapitre II que le sous-anneau $A[\underline{V}]$ de $D_k = A[\underline{F},\underline{V}]$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de $\widehat{CW}_B$.

Soit G un groupe p-divisible sur B , soit $G_k = G \otimes_B k$ sa fibre spéciale et soit E_G l'extension universelle de G (cf. par exemple, [38] , chap. I, § 1). On peut montrer que, si $B = k$ ou $W(k)$, le complété formel $\hat{E}_G$ de E_G s'identifie canoniquement, et fonctoriellement en G , au B-foncteur en groupes formels

$$E'_G(R) = \mathrm{Hom}_{A[\underline{V}]}(\underline{M}^{(1)}(G_k), \widehat{CW}_B(R)) \quad \text{, pour tout B-anneau fini } R .$$

Ce résultat reste-t-il vrai dans le cas général (i.e. $B = A'$, avec $e \neq 1$, ou $B = A'/m^{\nu}$) ?

Notons, d'autre part, $N(G)$ le $A[\underline{V}]$-module à gauche $\mathrm{Hom}(\hat{E}_G, \widehat{CW}_B)$. On construit facilement une application $A[\underline{V}]$-linéaire à gauche de $N(G)$ dans $\underline{M}^{(1)}(G)$. Lorsque $B = A$, on peut montrer que cette application est un isomorphisme ; ceci reste-t-il vrai lorsque $B = A'$ (avec $e \neq 1$) ? Que peut-on dire dans le cas général ?

Nous reviendrons sur ces questions dans une publication ultérieure ; ceci nous permettra en particulier d'expliciter le lien entre nos travaux et ceux de Mazur-Messing ([38]) donc aussi ceux de Grothendieck et Messing ([29] , [30] , [39]).