1 Operator norms

1.1 Banach space norms

- L^1 sup norm

$$\|A\|_{1\to 1} = \text{least }\{M \mid \forall u \, \|Au\|_1 \leq M\|u\|_1\} = \sup_y \int |a(x,y)| \, dx.$$

- L^2 sup norm

$$\|A\|_{2\to 2} = \text{least }\{M \mid \forall u \, \|Au\|_2 \leq M\|u\|_2\}.$$

- L^∞ sup norm

$$\|A\|_{\infty\to\infty} = \text{least }\{M \mid \forall u \, \|Au\|_\infty \leq M\|u\|_\infty\} = \sup_x \int |a(x,y)| \, dy.$$

1.2 Hilbert space norms

- trace norm

$$\|A\|_1 = \text{tr}(\sqrt{A^*A})$$

- Hilbert-Schmidt norm

$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} = \sqrt{\int\int |a(x,y)|^2 \, dx \, dy}.$$

- sup norm

$$\|A\|_\infty = \text{least }\{M \mid \forall u \, \|Au\|_2 \leq M\|u\|_2\}.$$

1.3 Inequalities

$$\|A\|_{2\to 2} \leq \sqrt{\|A\|_{1\to 1}\|A\|_{\infty\to\infty}}$$

$$\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1$$

$$\|A\|_\infty = \|A\|_{2\to 2}$$