

Symbols and Science

William McCallum

Institute for Mathematics and Education
The University of Arizona

Chicago Symposium, March 2009



Cardano, Sponge Cake, and Notation

Cardano's famous book "Ars Magna" (1545) marked the end of the medieval period in mathematics and triggered the development of modern mathematical notation. The famous formula for the cubic, as presented in the "Ars Magna", resembles more a culinary recipe than a modern formula. The switchover has implications for the teaching of mathematics.



One view of algebra: quadratic equations

The quadratic formula

A number x satisfies

$$x^2 + bx + c = 0$$

if and only if

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Factoring

If $r + s = -b$ and $rs = c$, then

$$x^2 + bx + c = (x - r)(x - s)$$

and

$$x^2 + bx + c = 0 \quad \text{if and only if} \quad x = r \quad \text{or} \quad x = s.$$



Another view of algebra: understanding functions

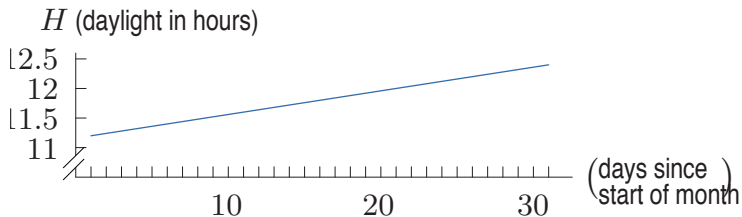


Figure: Sunlight in Madrid

The graph shows the number of hours of daylight in Madrid for one month.

- Why does the graph look linear?
- Estimate and interpret the slope of the line.
- What month does the graph show?

What symbolic skills do modern students need?

- Manipulative skills?
- Graphical and numerical understanding?
- Symbol sense?



INSTITUTE FOR
MATHEMATICS
& EDUCATION



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.

على تسعة وثلاثين قيم المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 ذلك انه لربما وجدنا مثلثا جديدا وهو مثلثا وهو احد
 اشكال المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج ما زادنا منه وهو
 خمسة من اربعة وهو مثلج آت المثلج هو الال وهو جديدا
 والال تسعة وهذه موزعة



هذا مال واحد ومثلثين عريضا يعطى عشرة اجزاء فانما
 يتصل الال متصفا مره اسمعيل الاشكال وهو مثلج آت من قسم
 اليه مثلثا سداسي الاشكال مره مثل احد اشكال مثلج آت وهو
 مثلج من المثلج آت مثل مثلث السداسي جميعا المثلج آت
 وقد مثلنا ان طوله عشرة من القاعد ان كان مثلج مربع
 سداسي الاشكال والاشكال الال احد اقله سداسي الال واحد جديدا
 فمثلت المثلج الال اثنين جديدا فلما قال مال واحد ومثلثين
 يعطى عشرة اجزاء مثلما ان طوله مثلج آت عشرة اعداد ان
 المثلج آت جديدا لعل متصفا المثلج آت متصل مثل ثمانية



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.

على تسعة وثلاثين قيم المثلج المثلج القديم هو مثلج ذو جانب
ثابت كذا لربطه منسوبا جديدا وهو ثمانية وهو واحد
المثلج المثلج القديم دائما لقسمة منه مثل ما زادنا منه وهو
خمسة من ثلثة وهو مثلج آت القوي هو الثال وهو جديدا
وذلك تسعة وهذه مبرهه



هذا مال واحد ومثلجين عريضا يعدهم عشرة اجزاء فانا
نصل الال نصفها مره اسمعيل المثلج وهو مثلج آت كتم قسم
اليه مثلجا سداسين المثلج مرهه مثل المثلج المثلج آت وهو
مثلج من المثلج آتة مثل مثلج المثلجين جميعا المثلج آت
وهو مثلجا ان ثلثة عشرة من المثلج من المثلج آت
مساوي المثلج المثلج آتة فاني اعد اقلهه مائتين الى واحد جديدا
فلت المثلج والي اثنين جديدا فلما قال مال واحد ومثلجين
يعدل عشرة اجزاء فلما ان مثلج المثلج آتة عشرة اعداد من
مثلج آتة جديدا فلما مثلج آتة مائتين مثلج آتة



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.

$$x^2 + 10x = 39$$

على تسعة وثلاثين قيم المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 ذلك انه لربما وجدنا مثلجاً مضافاً إلى عشرة أضعافه
 المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 خمسة من ثلثة وهو مبلغ المثلج هو الثال وهو جذره
 والثل تسعة وهذه هي حله



هذا ما كان يأخذ ويحسب عريضا بعدد عشرة أجزاء مائة
 ليصل إلى تسعة مائة مائة المثلج وهو مبلغ 39 ثم قسم
 إليه ثلثها مائة مائة المثلج مائة مائة المثلج المثلج المثلج المثلج
 مبلغ 25 والمثلج مائة مائة المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 وقد علمنا ان ثلثه عشرة من العدد ان كان مبلغ مائة مائة
 مائة المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 فقلت المثلج هو الثال جذره فلما قال مال واحد وثمانين
 يعدل عشرة أجزاء مائة ان ثلث مبلغ 39 عشرة اعداد ان
 مبلغ 39 عشرة اعداد فمما مبلغ 39 مائة مائة مائة



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? *The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.*

$$x^2 + 10x = 39$$

على تسعة وثلاثين قيم المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 ذلكت كل اربعة وسبعين مائة واثنتين وثلاثين وهو واحد
 المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 خمسة من ثلثة وهو مبلغ المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 والثلثة تسعة وهذه مائة



هذا مال واحد ومثوبين عشرين مائة مائة عشرة اجزاء مائة
 متصل الى تسعة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 اليه مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 مبلغ مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 وقد علمنا ان ثلثة عشرة من المثلج من المثلج من المثلج من المثلج
 مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 فمبلغ المثلج من المثلج مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة
 مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة مائة



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? *The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.*

على تسعة وثلاثين قيم المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 ذلك انه لربما وجدنا مثلجاً جديداً وهو ثمانية وهو واحد
 المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 خمسة من ثلثة وهو مبلغ المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 ولذا تسعة وهذه هي حجة



هذا ما كان واحد وشعيرين عريضاً يعدهم عشرة أجزاء فانا
 نصل الى ثلثها مره سهيل المثلج وهو مبلغ 39 ثم نضم
 اليه ثلثها سداسين المثلج مره من المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 مبلغ 75 والمثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 وقد علمنا ان ثلثه عشرة من المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 سداسين المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 فثلث المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 يعدل عشرة اجزاء فمما ان ثلث المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج
 مبلغ 39 جدره المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج المثلج

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.

على تسعة وثلثين قيم السطح المثلث الذي هو سطحه زه وثلث
 ذلك كله لزمه مني معلوما جديدا وهو ثمانية وهو واحد
 المثلث السطح المثلث الذي له تسعة من مثل ما إذا شئت وهو
 خمسة من ثلثه وهو ثلث سطح آب الذي هو الابل وهو جديدا
 والابل تسعة وهذه موزعة



هذا ما كان يأخذ ويشيرون عريضا بعدله عشرة أجزاء فانا
 نصل الابل ثلثها مائة سبعين المثلث وهو سطح آب ثم قسم
 إليه ثلثها سداسين المثلث مائة من المثلث سطح آب وهو
 ثلثه من السطح ثمة مثلث السطحين جميعا ثلثه 33
 وقد علمنا ان ثلثه عشرة من العدد في ثمة سطح مربع
 سداسين المثلث والبراه ان اشد ثلثه سداسين في واحد جديدا
 فثلث السطح ولها اثنين جديدا فاما الابل واحد وسداسين
 يدخل عشرة اجزاء معلوما ان ثلثه ثلثه 33 عشرة اعداد في
 ثلثه 33 جديدا معلوما ثلثه ثمة متصلين ثلثه ثمة

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$

Al-Khwarismi, Hisab al-jabr w'al-muqabala, 830



... what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39? The manner of solving this type of equation is to take one-half of the roots just mentioned. ... Therefore take 5, which multiplied by itself gives 25, an amount which you add to 39 giving 64. **Having taken then the square root of this which is 8, subtract from it half the roots, 5 leaving 3.**

على تسعة وثلاثين قيم الخاضع المثلثين الخاضع له واحد
 ذلك ثم لرفع من واحد مضافا جزوا وهو ثمانية وهو واحد
 الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع
 خمسة من ثمانية وهو ثمانية وهو الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع الخاضع
 ذلك تسعة وهذه هي



هذا مثال واحد وشؤون غيرها يعلم عشرة أجزاء فانا
 نصل الى ثمانية مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 اليه ثمانية مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 وقد علمنا ان ثمانية مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 فقلت الخاضع له الثمن جزوا فلما قال مثال واحد وشؤون
 يعدل عشرة أجزاء فمما ان مثال مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا
 مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا مضافا

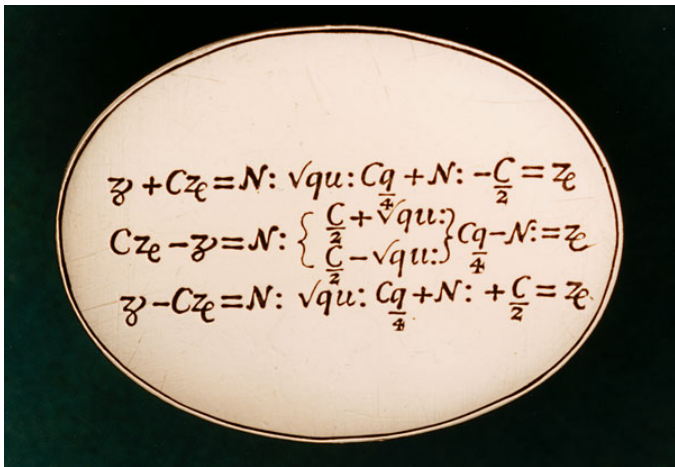
$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 = 64$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

The quadratic formula in the 17th century



From the Oxford Museum of History of Science (Stephen Johnston, photo Bluebridge Farm Studio)

What is going on here?

$$z + Cr = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : -\frac{C}{2} = r$$

$$Cr - z = N : \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \\ \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \end{array} \right\} \frac{Cq}{4} - N : = r$$

$$z - Cr = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : +\frac{C}{2} = r$$



What is going on here?

$$x^2 + Cx = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : -\frac{C}{2} = x$$

$$Cx - x^2 = N : \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \\ \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \end{array} \right\} \frac{Cq}{4} - N : = x$$

$$x^2 - Cx = N : \sqrt{qu} : \frac{Cq}{4} + N : +\frac{C}{2} = x$$



What is going on here?

$$x^2 + Cx = N : \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : -\frac{C}{2} = x$$

$$Cx - x^2 = N : \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \\ \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \end{array} \right\} \frac{C^2}{4} - N : = x$$

$$x^2 - Cx = N : \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : +\frac{C}{2} = x$$



What is going on here?

$$x^2 + Cx = N, \quad \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : -\frac{C}{2} = x$$

$$Cx - x^2 = N, \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{C}{2} + \sqrt{qu} : \\ \frac{C}{2} - \sqrt{qu} : \end{array} \right\} \frac{C^2}{4} - N : = x$$

$$x^2 - Cx = N, \quad \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : +\frac{C}{2} = x$$



What is going on here?

$$x^2 + Cx = N, \quad \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : -\frac{C}{2} = x$$

$$Cx - x^2 = N, \quad \frac{C}{2} \pm \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} - N : = x$$

$$x^2 - Cx = N, \quad \sqrt{qu} : \frac{C^2}{4} + N : +\frac{C}{2} = x$$



What is going on here?

$$x^2 + Cx = N, \quad \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} - \frac{C}{2} = x$$

$$Cx - x^2 = N, \quad \frac{C}{2} \pm \sqrt{\frac{C^2}{4} - N} = x$$

$$x^2 - Cx = N, \quad \sqrt{\frac{C^2}{4} + N} + \frac{C}{2} = x$$



Viète's formulae and the quadratic formula

If

$$x^2 + bx + c = 0$$

then let

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{and} \quad s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

► Exercise



INSTITUTE FOR
MATHEMATICS
& EDUCATION

Viète's formulae and the quadratic formula

If

$$x^2 + bx + c = 0$$

then let

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{and} \quad s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Exercise

Give an explanation, purely in terms of the structure of the expressions, of why these two numbers satisfy

$$r + s = -b \quad \text{and} \quad rs = c.$$

▶ Answer

▶ Skip

Viète's formulae and the quadratic formula

If

$$x^2 + bx + c = 0$$

then let

$$r = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad \text{and} \quad s = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Answer

When you add r and s , the plus and minus signs cancel.

Viète's formulae and the quadratic formula

If

$$x^2 + bx + c = 0$$

then let

$$r = \frac{-b}{2} \quad \text{and} \quad s = \frac{-b}{2}$$

Answer

When you add r and s , the plus and minus signs cancel.

Viète's formulae and the quadratic formula

If

$$x^2 + bx + c = 0$$

then let

$$r = \frac{\boxed{} + \boxed{}}{2} \quad \text{and} \quad s = \frac{\boxed{} - \boxed{}}{2}$$

Answer

When you add r and s , the plus and minus signs cancel.

When you multiply r and s , you get the difference of two squares in the numerator,

$$(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4c})^2 = b^2 - (b^2 - 4c) = 4c.$$

An example from economics

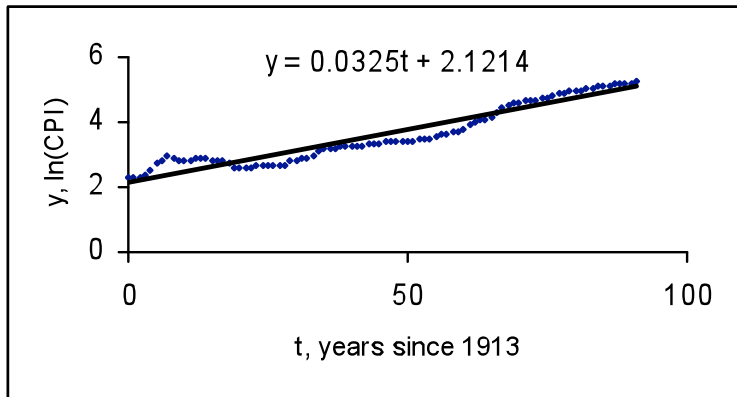


Figure: Cost price index for the last 100 years

Another view of the same data

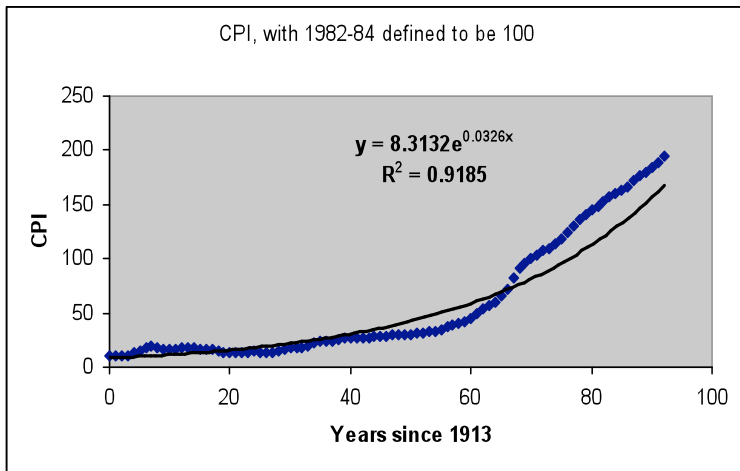


Figure: Cost price index for the last 100 years

What skill is required to see the equivalence?

- Manipulative skill.

$$\log(Ce^{kt}) = kt + \log(C)$$

- Symbol sense. Understanding the structural similarity between

$$mx + b \quad \text{and} \quad Ca^x$$

An example from biology: the Michaelis-Menten equation

- v_0 initial velocity of reaction
- $[S]_0$ is initial concentration of substrate
- v_{\max} , K_M are constants

$$v_0 = \frac{v_{\max}[S]_0}{K_M + [S]_0}$$

An example from biology: the Michaelis-Menten equation

- v_0 initial velocity of reaction
- $[S]_0$ is initial concentration of substrate
- v_{\max} , K_M are constants

$$v_0 = \frac{v_{\max}[S]_0}{K_M + [S]_0}$$

How do you know if a reaction follows the Michaelis-Menten equation?

An example from biology: the Michaelis-Menten equation

- v_0 initial velocity of reaction
- $[S]_0$ is initial concentration of substrate
- v_{\max} , K_M are constants

$$v_0 = \frac{v_{\max}[S]_0}{K_M + [S]_0}$$

How do you know if a reaction follows the Michaelis-Menten equation?

$$\frac{1}{v_0} = \frac{K_M + [S]_0}{v_{\max}[S]_0}$$
$$\frac{1}{v_0} = \frac{K_M}{v_{\max}} \cdot \frac{1}{[S]_0} + \frac{1}{v_{\max}}$$

An example from physics

$$L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

- What value of v makes this equal to L_0 ?
- What value of v makes it equal to 0?

An example from finance

$$P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12n} = 10,000$$

What are the differences between solving this equation for P , r , and n ?